

VISUALISATION DE FONCTIONS GÉNÉRANT UN POINT DE SELLE MULTIPLE DANS \mathbb{R}^n

RÉMI GAGNÉ

RÉSUMÉ.

Le présent rapport est la conclusion d'un projet de visualisation de fonctions allant de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et générant des points de selle multiple. Le choix des fonctions étudiées est motivé par une famille de fonctions discutée dans [2]; elles se trouvent à être une généralisation de cette famille. Le logiciel utilisé est Mathematica 7.

On y présente en premier lieu, aussi assisté par Mathematica, le calcul du degré topologique des points de selle, qui sont des points critiques dégénérés. Ensuite viennent plusieurs images, des cas $n = 2$ à $n = 4$, visant à montrer certaines de leur caractéristiques.

Ce travail se veut un d'expérimentation; par conséquent, aucun résultat original de mathématiques fondamentales n'y est démontré.

0. Rappels

Quelques notions de calcul vectoriel ainsi qu'une connaissance minimale de la projection stéréographique et des quaternions seront nécessaires. Il est donc proposé de les introduire avant de commencer.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction réelle à n variables.

Une *courbe de niveau* d'une fonction est l'ensemble des points du domaine pour lesquels la fonction vaut une certaine valeur fixée.

Le *gradient* de f , noté ∇f , est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n donnée par

$$\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n} \right),$$

c'est le vecteur des dérivées partielles de f . On rappelle qu'une dérivée partielle par rapport à une variable se fait en considérant toutes les autres variables comme des constantes et en dérivant normalement par rapport à la variable de dérivation.

Ce travail a été effectué au cours de la session d'hiver 2009 à l'Université de Sherbrooke et a été supervisé par les professeurs Tomasz Kaczynski et Virginie Charette dans le cadre d'un financement par le FQRNT.

Notons que le gradient d'une fonction indique la direction dans laquelle on doit se déplacer dans le domaine de la fonction pour que cette dernière augmente le plus rapidement possible. Aussi, le gradient en un point du domaine est perpendiculaire à la courbe de niveau passant par ce point.

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_m)$ une fonction vectorielle réelle à n variables avec m composantes où chaque y_i est fonction des x_i . Notons que le gradient d'une fonction réelle à n variables est une fonction vectorielle réelle de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .

La *matrice jacobienne* de F , notée J_F , est donnée par

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\delta y_1}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta y_1}{\delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta y_m}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta y_m}{\delta x_n} \end{bmatrix},$$

c'est la matrice des dérivées (partielles) premières de F . Elle est fonction des x_i .

Le *jacobien* de F est le déterminant de sa matrice jacobienne lorsque cette dernière est une matrice carrée ce qui est le cas lorsque f est le gradient d'une fonction. Il est aussi fonction des x_i .

La *matrice hessienne* de f , notée H_f , est donnée par

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2} & \cdots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_n} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2} & \cdots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_n \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_n \delta x_2} & \cdots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_n^2} \end{bmatrix},$$

c'est la matrice des dérivées (partielles) secondes de f . Elle est fonction des x_i . Notons que cette matrice est la matrice jacobienne du gradient de f .

Le *hessien* de f est le déterminant de sa matrice hessienne. Il est aussi fonction des x_i .

Pour plus d'information, un manuel de calcul vectoriel comme, par exemple, [1] peut-être consulté.

La *projection stéréographique* consiste à prendre une sphère de dimension n (ensemble des points de \mathbb{R}^{n+1} équidistants à un centre fixé), à lui enlever un point et à faire correspondre chacun des points restants à un point de \mathbb{R}^n . Cette correspondance est réversible.

On fait correspondre à un point de la sphère le point de l'espace euclidien qui est l'intersection avec la droite contenant le point en question et le point enlevé, qui est appelé le point de projection. On doit avoir que l'espace euclidien sur lequel on projette la sphère est, à translation près, tangent au point de projection et ne contienne pas ce dernier.

Pour plus d'information, voir [5].

L'algèbre des *quaternions* est une extension des nombres complexes. Un quaternion est de la forme

$$x + yi + zj + wk$$

où x est la composante réelle et y, z et w sont les composantes imaginaires des axes imaginaires i, j et k , respectivement. Les calculs dans les quaternions sont régis par les relations

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

donnant les relations $ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j$ montrant, du coup, que les quaternions ne forment pas une algèbre commutative.

Pour plus d'information, voir [4].

1. Introduction

Dans [2], il est en partie question de la famille de fonctions

$$f_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } f_k(x, y) = \Re\left((x + iy)^{k+1}\right), k \in \mathbb{N}^*,$$

où \Re représente la partie réelle, qui a la caractéristique de générer un point de selle de multiplicité k à l'origine. L'image suivante, donnant le graphe des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 autour de l'origine, en témoigne (on fait appel, pour l'instant, au sens intuitif du lecteur d'un point de selle).

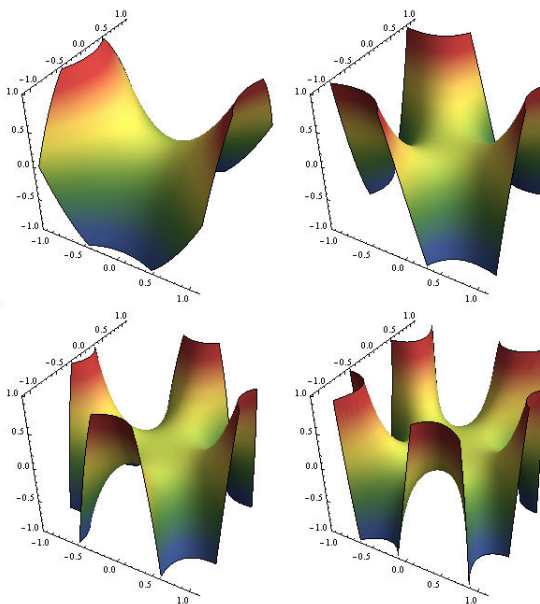


FIGURE 1. Graphe des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 autour de l'origine

On s'intéresse en fait au degré topologique, appelé aussi degré de Brauer [3] que nous appelons ici tout court le degré, de ces points de selle multiple. Précisons ici ce qu'il en est.

Définition 1 : Soient une fonction $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec D borné et F continue sur \bar{D} , et un point $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $p \notin F(\partial D)$ et $J_F(x) \neq 0$ pour tout $x \in F^{-1}(p)$, alors le *degré de F au point p relativement à D* , noté $d(F, D, p)$, est

donné par

$$(1) \quad d(F, D, p) = \sum_{x \in F^{-1}(p)} \text{signe } J_F(x)$$

où $J_F(x)$ est le jacobien de F évalué en x [3].

Il sera discuté plus loin de ce qui peut être fait lorsque le jacobien est nul pour au moins un des points de $F^{-1}(p)$.

Ici, il est question de la famille $\{F_k\}$ avec $F_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ étant le gradient de f_k . On prend $p = 0$ et, de manière un peu arbitraire, $D = B_1^2(0) := B^2$, la boule ouverte de rayon 1 centrée à l'origine, dans \mathbb{R}^2 . En fait, n'importe quel ensemble borné D contenant l'origine, mais pas dans sa frontière, serait équivalent puisqu'on a pour tout k , que $F^{-1}(p) = \{0\}$ et, par le même fait, que $p \notin F(\delta D)$. Ignorons momentanément la condition relative au jacobien.

Voici les champs de vecteurs représentés par F_1, F_2, F_3 et F_4 autour de B^2 avec S^1 , comme frontière de B^2 , et l'origine, comme seul point d'équilibre du système d'équations différentielles $\left(\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t}\right) = F_k$, en évidence. On parle d'un tel système car, en considérant que le gradient évalué en un point donne la direction d'augmentation la plus rapide de la fonction en ce point, sa solution donne la trajectoire, sur le domaine, que suivrait une particule déposée sur le graphe de la fonction et se déplaçant toujours dans la direction du gradient. La variable t peut être vue comme le temps et la norme du gradient, en tant que vecteur, est gage de la rapidité du déplacement.

Dans le cas de fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , on peut voir ce déplacement comme celui d'une particule soumise à une anti-gravité. Un point d'équilibre représente donc un endroit où il n'y a aucun déplacement pour une particule s'y trouvant, comme les points de celles de l'image 1. Par rapport à un de ces points de selle, on peut identifier des lieux pour lesquels une particule y étant déposée se rend au point de selle lors d'une progression ou d'une régression infinie dans le temps. Ces lieux seront appelés ravins et crêtes, respectivement.

Définition 2 : Un *point critique* d'une fonction est un point où s'annule le gradient ; il est *dégénéré* si le hessien s'y annule aussi.

En vertu de la définition ci-haute, il s'ensuit que $F_k^{-1}(0)$, l'ensemble sur lequel la sommation pour calculer $d(F_k, B^2, 0)$ doit être effectuée, se trouve à être l'ensemble des points critiques de f_k . Et comme le jacobien de F_k est nul autre que le hessien de f_k , le calcul du degré en question ne peut se faire directement que si tous les points critiques de f_k sont non-dégénérés. Or, et là est tout l'intérêt, ce n'est le cas que si $k = 1$.

La théorie dit que le degré $d(F, D, p)$, est invariant à une perturbation assez petite de F [3]. Une stratégie est alors d'ajouter un facteur linéaire $-\varepsilon x$, avec $\varepsilon > 0$, aux fonctions $\{f_k\}$ ce qui ajoutera une perturbation $(-\varepsilon, 0)$ aux champs de vecteurs donnés par $\{F_k\}$. Notons $\{g_k\}$ et $\{G_k\}$ les familles ainsi obtenues, respectivement.

On espère ensuite que pour tout k , les points critiques de g_k soient non-dégénérés de sorte qu'on puisse calculer $d(G_k, B^2, 0)$ directement à l'aide de la formule (1). Enfin, on aurait que $d(F_k, B^2, 0) = d(G_k, B^2, 0)$. Il est connu que la

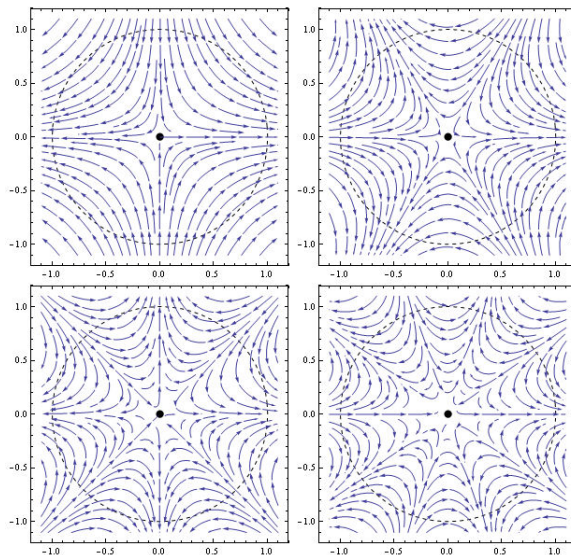


FIGURE 2. Champ de vecteurs des fonctions F_1 , F_2 , F_3 et F_4 autour de l'origine

mesure des valeurs de ε donnant une fonction avec des points critiques dégénérés est nulle.

Pour calculer $d(F_k, B^2, 0)$, [2] utilise l'analyse complexe, un résultat connu sur le degré de fonctions holomorphes $\bar{B}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ et le théorème de multiplication de la théorie du degré pour arriver au résultat, qui est $-k$. On utilise ce résultat pour donner une définition d'un point de selle.

Définition 3 : Un *point de selle* d'une fonction est un point critique qui n'est pas un extrémum ; son hessien est négatif. Sa *multiplicité* est égale à la valeur absolue de son degré.

Lorsque $k = 1$ l'origine est un point de selle de multiplicité 1, ou encore un point de selle simple. Pour toutes les autres valeurs de k , l'origine est un point de selle multiple, de multiplicité k .

On vise dans ce document à obtenir le degré de points critiques dégénérés de fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en utilisant la méthode de la perturbation du champ de vecteurs. On commencera par confirmer le résultat dans le cas $n = 2$ à l'aide de cette méthode et ensuite utiliser ce résultat pour les cas où $n > 2$. On compte exploiter la puissance du calcul symbolique de Mathematica pour y arriver.

Selon le degré obtenu, il pourra être conclu que ces points critiques dégénérés sont des points de selle multiple.

Il y aura aussi, bien sûr, moult figures pour permettre de visualiser des caractéristiques de certaines de ces fonctions allant de \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R} .

2. Perturbation des fonctions $\{f_k\}$

Commençons par donner les fonctions f_1 à f_4 , leur gradient, F_1 à F_4 , les matrices jacobiennes des gradients, qu'on notera DF_1 à DF_4 , leurs points critiques, $F_1^{-1}(0)$ à $F_4^{-1}(0)$ et les jacobiens des gradients évalués à ces points critiques.

TABLE 1. f_k et F_k pour $1 \leq k \leq 4$

k	f_k	F_k
1	$x^2 - y^2$	$(2x, -2y)$
2	$x^3 - 3xy^2$	$(3x^2 - 3y^2, -6xy)$
3	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4$	$(4x^3 - 12xy^2, -12x^2y + 4y^3)$
4	$x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$	$(5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4, -20x^3y + 20xy^3)$

TABLE 2. DF_k , $F_k^{-1}(0)$ et $J_k(F_k^{-1}(0))$ pour $1 \leq k \leq 4$

k	DF_k	$F_k^{-1}(0)$	$J_k(F_k^{-1}(0))$
1	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\{(0, 0)\}$	$\{-4\}$
2	$\begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$	$\{(0, 0)\}$	$\{0\}$
3	$\begin{pmatrix} 12x^2 - 12y^2 & -24xy \\ -24xy & -12x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}$	$\{(0, 0)\}$	$\{0\}$
4	$\begin{pmatrix} 20x^3 - 60xy^2 & -60x^2y + 20y^3 \\ -60x^2y + 20y^3 & -20x^3 + 60xy^2 \end{pmatrix}$	$\{(0, 0)\}$	$\{0\}$

Ensuite, perturbons-les en leur ajoutant la quantité $-\varepsilon x$, avec $\varepsilon > 0$ et notons ces nouvelles fonctions $\{g_k\}$ et leur gradients $\{G_k\}$. On a alors que $g_k = f_k - \varepsilon x$, $G_k = F_k - (\varepsilon, 0)$ et $DG_k = DF_k$. Voici les points critiques qui sont réels lorsque $\varepsilon > 0$ (k points critiques sur k^2 au total), avec leur jacobien, pour ces nouvelles fonctions.

TABLE 3. $G_k^{-1}(0)$ pour $1 \leq k \leq 4$

k	$G_k^{-1}(0)$
1	$\{(\frac{\varepsilon}{2}, 0)\}$
2	$\{(\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, 0), (-\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, 0)\}$
3	$\{(\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{4}}, 0), (-\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{4}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{4}}), (-\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{4}}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{4}})\}$
4	$\{(\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{5}}, 0), (0, \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{5}}), (-\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{5}}, 0), (0, -\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{5}})\}$

TABLE 4. $J_k(G_k^{-1}(0))$ pour $1 \leq k \leq 4$

k	$J_k(G_k^{-1}(0))$
1	$\{-2^2\}$
2	$\{-(2\sqrt{3\varepsilon})^2, -(2\sqrt{3\varepsilon})^2\}$
3	$\left\{-\left(3\sqrt[3]{4\varepsilon^2}\right)^2, -\left(3\sqrt[3]{4\varepsilon^2}\right)^2, -\left(3\sqrt[3]{4\varepsilon^2}\right)^2\right\}$
4	$\left\{-\left(4\sqrt[4]{5\varepsilon^3}\right)^2, -\left(4\sqrt[4]{5\varepsilon^3}\right)^2, -\left(4\sqrt[4]{5\varepsilon^3}\right)^2 - \left(4\sqrt[4]{5\varepsilon^3}\right)^2\right\}$

On voit des deux derniers tableaux que pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction g_k admet k points critiques non-dégénérés, les jacobiens ne s'annulant que si $\varepsilon = 0$. Dans ce cas, les k points critiques deviennent un seul point critique multiple, à savoir l'origine, ce qui nous redonne la fonction f_k .

On remarque aussi que tous les jacobiens sont négatifs et donc que le degré de chacun de ces points est -1. Et comme il y a k points critiques, on obtient bel et bien que

$$d(F_k, B^2, 0) = d(G_k, B^2, 0) = \sum_{x \in G_k^{-1}(0)} \text{signe } J_{G_k}(x) = k \cdot -1 = -k.$$

On note enfin que tous ces points sont des points de selle simple car leur hessien est négatif et qu'il s'agit de points critiques de fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Fixons maintenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et regardons, aux figures 3 et 4, l'équivalent des figures 1 et 2 mais pour les fonctions g_1 à g_4 et G_1 à G_4 ainsi obtenues.

La figure 4 nous permet de bien voir les k points critiques et de constater d'une autre manière que chacun de ces points est un point de selle simple. En effet, il y a, émanant de chaque point, exactement 2 ravins et crêtes contrairement à $k + 1$ pour les fonctions F_1 à F_4 , comme on peut le voir à la figure 2.

La figure 4 est aussi très intéressante du fait que les points critiques des fonctions perturbées semblent tous se situer à égale distance de l'origine. De plus, ils semblent être dispersés sur un cercle de rayon égal à cette distance à la manière dont les racines k^e complexes de l'unité le sont sur S^1 .

Le tableau 3 nous confirme ceci pour $k \leq 4$. En effet, on peut écrire que

$$G_k^{-1}(0) = \left\{ \sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{k+1}} \left(\Re \left(e^{\frac{2\alpha\pi i}{k}} \right), \Im \left(e^{\frac{2\alpha\pi i}{k}} \right) \right), \alpha = 0, 1, \dots, k-1 \right\}$$

où on voit que la distance entre chaque point critique et l'origine est $\sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{k+1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$.

Aussi, toujours pour $k \leq 4$, on peut tirer du tableau des jacobiens des points critiques des $\{g_k\}$ qu'ils valent tous $-\left(k \sqrt[k]{(k+1)\varepsilon^{k-1}}\right)^2$. De plus, les deux valeurs propres des matrices hessiennes de tous ces points sont $\pm k \sqrt[k]{(k+1)\varepsilon^{k-1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pm\infty$.

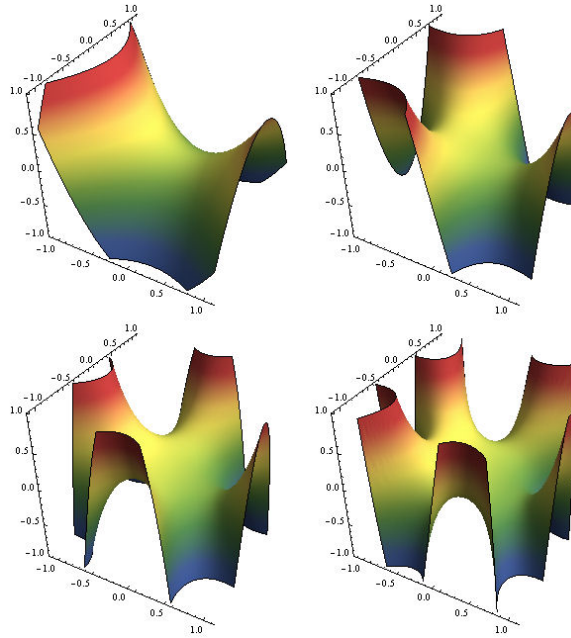


FIGURE 3. Graphe des fonctions g_1 , g_2 , g_3 et g_4 autour de l'origine

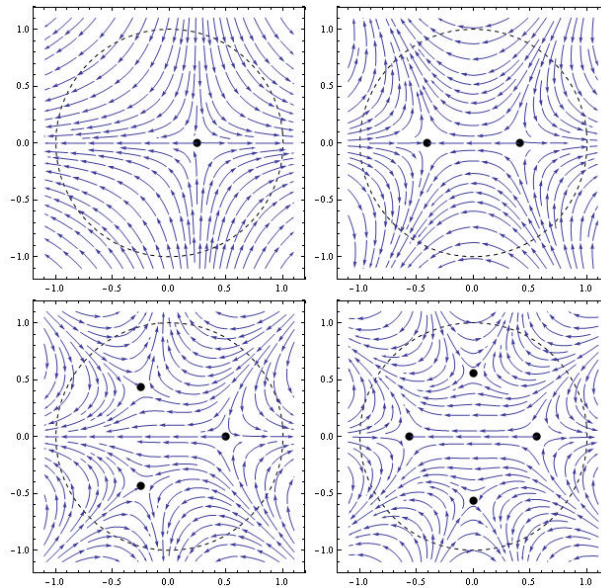


FIGURE 4. Champ de vecteurs des fonctions G_1 , G_2 , G_3 et G_4 autour de l'origine

Il est conjecturé que les deux derniers paragraphes sont valides pour toute valeur entière et strictement positive de k . Ils ont, du moins, été vérifiés pour $k \leq 6$ avec Mathematica. On tiendra ces conjectures comme vraies dans le reste de ce document.

3. Généralisation des fonctions $\{f_k\}$

Nous allons maintenant définir des familles de fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avec $n \geq 2$ à partir de la famille $\{f_k\}$. Cette famille de familles sera notée $\{f_{n,k}\}$, leurs gradients $\{F_{n,k}\}$ et leurs matrices hessiennes $\{DF_{n,k}\}$. On fait de même pour les fonctions $\{g_k\}$.

Les variables prises dans \mathbb{R}^n sont notées x_1, x_2, \dots, x_n et les nouvelles fonctions sont définies par

$$f_{2,k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto f_k(x_1, x_2)$$

$$f_{n,k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_{2,k}(x_1, x_2) + \sum_{i=3}^n \lambda_i x_i^2, \text{ avec } \lambda_i \in \{-1, 1\} \text{ et } n \geq 3$$

$$g_{2,k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto g_k(x_1, x_2)$$

et $g_{n,k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto g_{2,k}(x_1, x_2) + \sum_{i=3}^n \lambda_i x_i^2, \text{ avec } \lambda_i \in \{-1, 1\} \text{ et } n \geq 3.$

Ces fonctions se trouvent, si on veut, à plonger dans \mathbb{R}^n l'effet que les fonctions $\{f_{2,k}\}$ ont sur \mathbb{R}^2 et à introduire les nouvelles variables, de x_3 à x_n , sous une forme "muette". Ce terme est utilisé pour imaginer le fait que, contrairement à x_1 et x_2 , leur participation ne change pas, peu importe la valeur de k .

En effet, leur puissance est toujours fixée à 2 tandis que celles de x_1 et x_2 varient de sorte que leur somme, dans les termes du polynôme $f_{n,k}$ qui ne sont composés que d'eux, vaut $k + 1$.

De ceci, on tire que la famille $\{f_{n,k}\}$ n'est homogène, de degré $k + 1$, que pour $n = 2$; c'est-à-dire que pour tout k et tout $c \in \mathbb{R}$, on a que

$$f_{2,k}(cx_1, cx_2) = c^{k+1} f_{2,k}(x_1, x_2).$$

On peut d'ailleurs s'en convaincre facilement en regardant le tableau 1.

Dans un autre ordre d'idées, l'introduction des nouvelles variables en une somme où elles sont de degré 2, séparées les unes des autres et ne se mélangeant pas à x_1 ni à x_2 a comme conséquence qu'on obtient

$$F_{n,k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ avec } F_{n,k}(x_1, \dots, x_n) = \left(\underbrace{F_{2,k}(x_1, x_2)}_{2 \text{ fonctions}}, \underbrace{\{2\lambda_i x_i, i = 3, 4, \dots, n\}}_{n-2 \text{ fonctions}} \right) \begin{matrix} n \text{ fonctions} \\ \end{matrix}$$

et

$$DF_{n,k} \in M_n(\mathbb{R}) \text{ avec}$$

$$DF_{n,k}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} DF_{2,k} \in M_2(\mathbb{R}) & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 2\lambda_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 2\lambda_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 2\lambda_n \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'établir rapidement certains faits sur ces nouvelles fonctions et leurs perturbations, $\{g_{n,k}\}$. Ces faits sont tirés directement de faits sur $\{f_{2,k}\}$ et $\{g_{2,k}\}$.

Avant de regarder en détails les faits en question, donnons, à titre d'exemple, $f_{4,1}$ à $f_{4,4}$, $F_{4,1}$ à $F_{4,4}$ et $DF_{4,1}$ à $DF_{4,4}$, où on prend (x, y, z, w) comme étant (x_1, x_2, x_3, x_4) et on pose $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

TABLE 5. $f_{4,k}$ et $F_{4,k}$ pour $1 \leq k \leq 4$

k	$f_{4,k}$	$F_{4,k}$
1	$x^2 - y^2 + z^2 + w^2$	$(2x, -2y, 2z, 2w)$
2	$x^3 - 3xy^2 + z^2 + w^2$	$(3x^2 - 3y^2, -6xy, 2z, 2w)$
3	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + z^2 + w^2$	$(4x^3 - 12xy^2, -12x^2y + 4y^3, 2z, 2w)$
4	$x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + z^2 + w^2$	$(5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4, -20x^3y + 20xy^3, 2z, 2w)$

TABLE 6. $DF_{4,k}$ pour $1 \leq k \leq 4$

k	$DF_{4,k}$
1	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 6x & -6y & 0 & 0 \\ -6y & -6x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 12x^2 - 12y^2 & -24xy & 0 & 0 \\ -24xy & -12x^2 + 12y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 20x^3 - 60xy^2 & -60x^2y + 20y^3 & 0 & 0 \\ -60x^2y + 20y^3 & -20x^3 + 60xy^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On peut facilement voir, à partir des tableaux 5 et 6, à quoi ressemblent les fonctions $\{g_{n,k}\}$, leurs gradients $\{G_{n,k}\}$ et leurs matrices hessiennes $\{DG_{n,k}\}$, pour $k \leq 4$. Il suffit pour ceci de noter que, tout comme à la section précédente,

$$g_{n,k} = f_{n,k} - \varepsilon x, G_{n,k} = F_{n,k} - (\varepsilon, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ fois}}) \text{ et } DG_{n,k} = DF_{n,k}.$$

Voici maintenant ce qui peut être déduit. On a, pour tout $n \geq 2$, que les gradients $\{F_{n,k}\}$ ont tous les mêmes deux premières composantes avec toutes les autres de la forme $2\lambda_i x_i$, où $3 \leq i \leq n$. Il en est de même pour les $\{G_{n,k}\}$.

On en déduit que, pour tout $n \geq 2$, les points critiques ont tous, pour une même famille, les mêmes deux premières composantes avec toutes les autres valant 0. On peut exprimer ceci en écrivant

$$F_{n,k}^{-1}(0) = \left\{ \overbrace{(x, 0, 0, \dots, 0)}^{n \text{ composantes}}, x \in F_{2,k}^{-1}(0) \right\}$$

$n-2 \text{ fois}$

$$\text{et } G_{n,k}^{-1}(0) = \left\{ (x, 0, 0, \dots, 0), x \in G_{2,k}^{-1}(0) \right\}.$$

Aussi, les jacobiens des gradients aux points critiques se trouvent à n'être que le produit de termes de la forme $2\lambda_i$, où $3 \leq i \leq n$, avec les jacobiens des points critiques des fonctions $\{f_{2,k}\}$ ou $\{g_{2,k}\}$, selon le cas. On peut donc écrire

$$J_{n,k} \left(F_{n,k}^{-1}(0) \right) = J_{2,k} \left(F_{2,k}^{-1}(0) \right) \cdot 2^{n-2} \prod_{i=3}^n \lambda_i$$

$$\text{et } J_{n,k} \left(G_{n,k}^{-1}(0) \right) = J_{2,k} \left(G_{2,k}^{-1}(0) \right) \cdot 2^{n-2} \prod_{i=3}^n \lambda_i.$$

Dans le cas des fonctions $\{f_{n,k}\}$, ceci nous donne, comme avec les fonctions $\{f_{2,k}\}$, que le seul point critique est l'origine et qu'il est dégénéré pour tout $k > 1$. On cherche alors à calculer le degré pour ce point critique, qu'on note $d(F_{n,k}, B^n, 0)$, où B^n est la boule ouverte de rayon 1 centrée à l'origine, dans \mathbb{R}^n .

Dans le cas des fonctions $\{g_{n,k}\}$, ceci nous donne, comme avec les fonctions $\{g_{2,k}\}$, qu'il y a k points critiques situés dans le plan x_1x_2 , à égale distance de l'origine et disposés de manière uniforme autour d'un cercle. On peut, en effet, écrire

$$G_{n,k}^{-1}(0) = \left\{ \sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{k+1}} \left(\Re \left(e^{\frac{2\alpha\pi i}{k}} \right), \Im \left(e^{\frac{2\alpha\pi i}{k}} \right), 0, 0, \dots, 0 \right), \alpha = 0, 1, \dots, k-1 \right\}$$

où on voit que tous ces points sont toujours à une distance de $\sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{k+1}}$ de l'origine.

Quant à elles, les valeurs propres de tous les hessiens $\{DG_{n,k}\}$ évalués aux points critiques sont $\left\{ \pm k \sqrt[k]{(k+1)\varepsilon^{k-1}}, 2\lambda_3, 2\lambda_4, \dots, 2\lambda_n \right\}$ et donc les jacobiens des fonctions $\{G_{n,k}\}$ valent tous $-\left(k \sqrt[k]{(k+1)\varepsilon^{k-1}} \right)^2 \cdot 2^{n-2} \prod_{i=3}^n \lambda_i$.

Comme le produit $\prod_{i=3}^n \lambda_i$ vaut ± 1 , il s'ensuit que les signes des jacobiens valent ∓ 1 et donc que

$$d(F_{n,k}, B^n, 0) = d(G_{n,k}, B^n, 0) = \sum_{x \in G_{n,k}^{-1}(0)} \text{signe } J_{G_{n,k}}(x) = k \cdot \mp 1 = \mp k.$$

Et comme les valeurs propres ne sont pas toutes de même signe, tous ces points critiques sont des points de selle simple, ce qui nous permet de conclure que l'origine est un point de selle multiple; en fait, de multiplicité k .

4. Visualisation de fonctions $\{f_{n,k}\}$

Regardons maintenant à quoi ressemblent ces fonctions autour de leur point critique dégénéré, l'origine. Puisque la visualisation des cas où $n > 2$ ne se fait pas directement, il faudra utiliser d'autres moyens pour essayer de saisir ce qui se passe.

On s'intéressera en particulier aux cas $n = 3$ et $n = 4$; pour ceci on fera appel à des courbes de niveau (cas $n = 3$) et des projections stéréographiques (cas $n = 3$ et $n = 4$). On visualisera aussi le cas $n = 2$ pour justifier, en quelques sorte, les méthodes de visualisation utilisées.

4.1. Visualisation à l'aide de courbes de niveau

Lorsqu'il s'agit de fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, il y a trois types de point critique non-dégénéré : minimum, maximum ou point de selle simple. Contrairement à un extremum, un point de selle simple a la particularité d'être l'intersection de courbes de niveau et il en est de même pour un point de selle multiple. La figure 5 montre cette propriété.

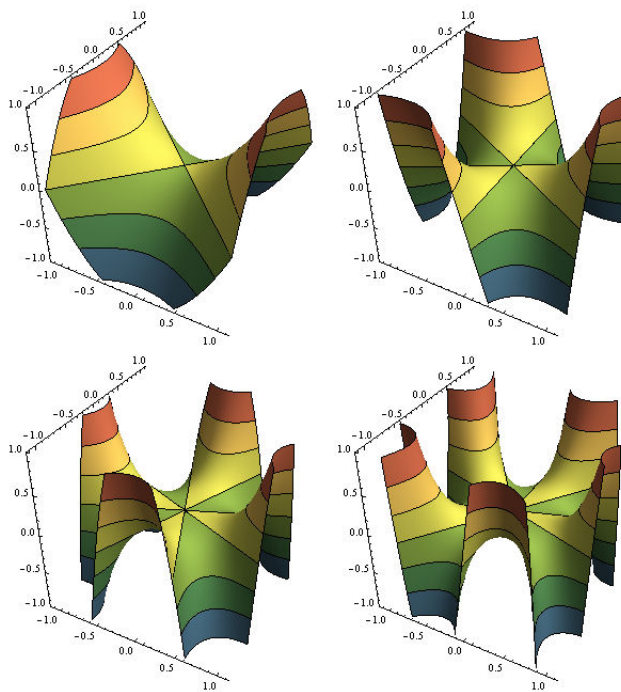


FIGURE 5. Graphe des fonctions $f_{2,1}$ à $f_{2,4}$, avec courbes de niveau, autour de l'origine

Mais comme les courbes de niveau sont des sous-ensembles du domaine, qui est ici \mathbb{R}^2 , il n'est pas nécessaire de les visualiser en 3D ; le 2D faisant parfaitement l'affaire, à la manière d'une carte topographique.

On a donc en 2D, à la figure 6, l'essentiel de l'information de la figure 5, en plus de S^1 et des crêtes et des ravins des champs de gradients correspondants,

en pointillé. On peut, à l'aide de la figure 2, corroborer l'emplacement de ces dernières.

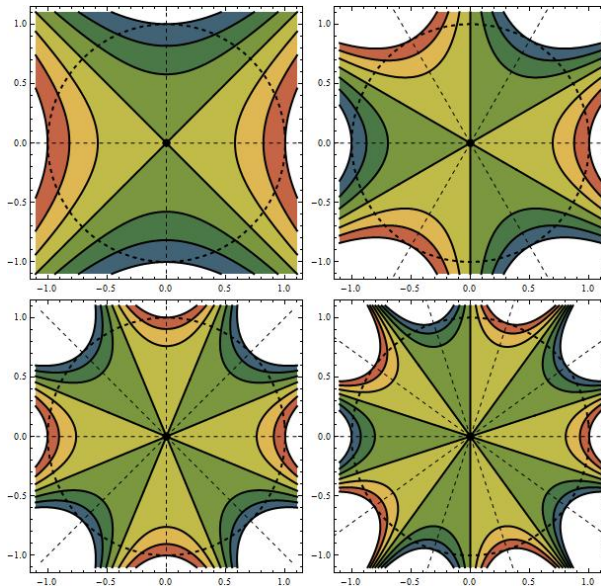


FIGURE 6. Courbes de niveau des fonctions $f_{2,1}$ à $f_{2,4}$ autour de l'origine

Il n'est pas possible de visualiser le graphe des fonctions $\{f_{3,k}\}$, mais puisque leur domaine est \mathbb{R}^3 , il est possible de visualiser leurs courbes de niveau. Et comme l'origine est aussi un point de selle multiple de ces fonctions, elle est l'intersection de telles courbes.

À l'opposé du cas précédent, visualiser les courbes de niveau de plusieurs ensembles de niveau ne serait pas pratique et, pour cette raison, un seul sera affiché sur l'image suivante, à savoir $f_{3,k}(x, y, z) = f_{3,k}(\text{origine}) = 0$.

Il y a deux images ; une pour le cas

$$\lambda_3 = 1 \Rightarrow f_{3,k}(x, y, z) = \Re\left((x + iy)^{k+1}\right) + z^2 \text{ (figure 7)}$$

et l'autre pour le cas

$$\lambda_3 = -1 \Rightarrow f_{3,k}(x, y, z) = \Re\left((x + iy)^{k+1}\right) - z^2 \text{ (figure 8)}.$$

On peut remarquer une rotation autour de l'axe des z de $\frac{\pi}{k+1}$ degrés entre les figures 7 et 8.

Enfin, bien que difficile à bien voir, on présente aux figures 9 et 10 trois vues orthogonales et une vue en perspective du champ de gradient de $f_{3,2}$ lorsque $\lambda_3 = 1$ et seulement la vue en perspective lorsque $\lambda_3 = -1$.

On peut remarquer la similitude de la vue de dessus avec la figure 2 ; elle provient du fait que le champ de gradient des fonctions $\{f_{3,k}\}$ est le même en x et en y que celui des fonctions $\{f_{2,k}\}$.

On peut aussi remarquer l'inversion de la direction en z des vecteurs, entre les deux vues en perspective, dû au changement de signe de λ_3 qui fait passer la troisième composante des vecteurs de $2z$ à $-2z$.

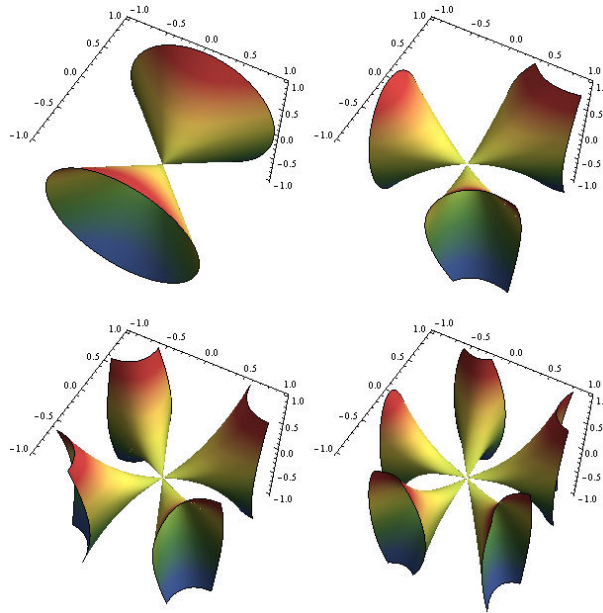


FIGURE 7. Courbes de niveau $f_{3,k}(x, y, z) = 0$ pour $1 \leq k \leq 4$ autour de l'origine ($\lambda_3 = 1$)

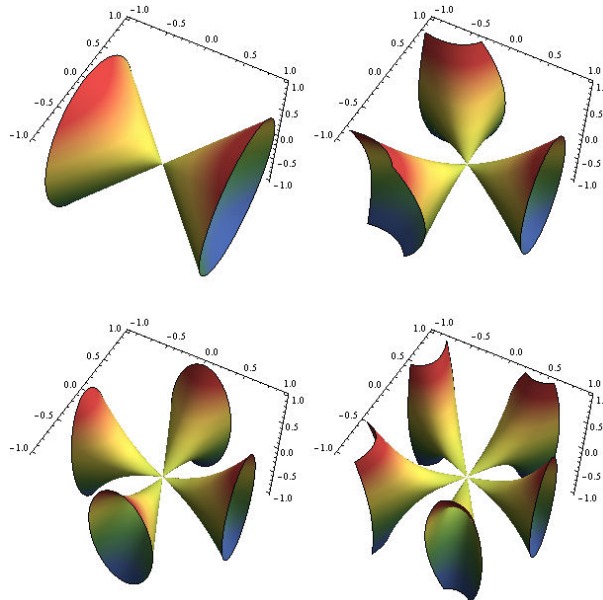


FIGURE 8. Courbes de niveau $f_{3,k}(x, y, z) = 0$ pour $1 \leq k \leq 4$ autour de l'origine ($\lambda_3 = -1$)

Notons que c'est la couleur et non la longueur des vecteurs qui est représentatif de leur norme ; plus les vecteurs sont près de l'axe des z et du plan $z = 0$, plus leur norme est petite.

On laisse au lecteur le soin de visualiser à quoi ressembleraient le champ de gradient des fonctions $f_{3,1}$, $f_{3,3}$ et $f_{3,4}$ à partir de ces deux images.

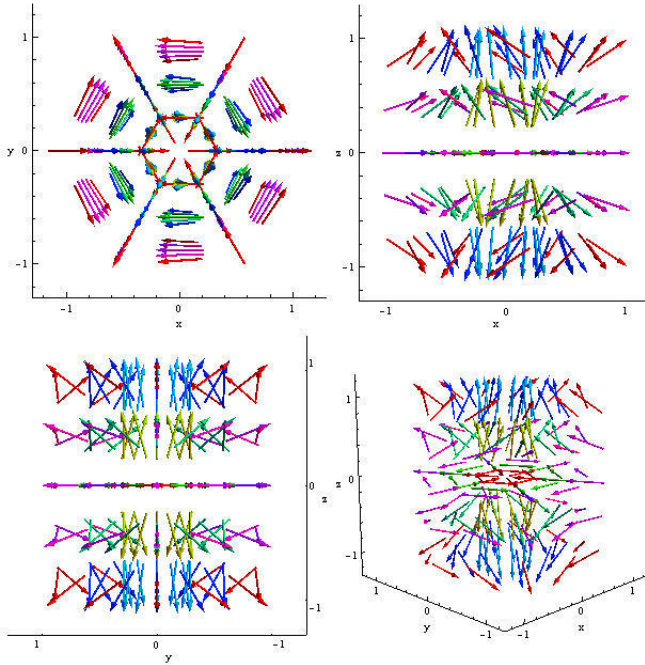


FIGURE 9. Quatre vues du champ de gradient de $f_{3,2}$ autour de l'origine ($\lambda_3 = 1$)

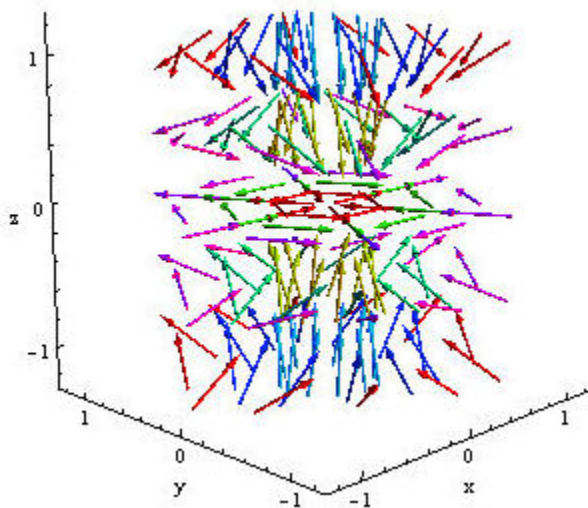


FIGURE 10. Champ de gradient de $f_{3,2}$ autour de l'origine ($\lambda_3 = -1$)

4.2. Visualisation à l'aide de projections stéréographiques

À la sous-section précédente, il a fallu trouver une manière de visualiser des fonctions en utilisant une dimension de moins que le nombre de dimensions requises pour voir leur graphe, qui est $n+1$. Les courbes de niveau ne nécessitent, en effet, que n dimensions pour les visualiser.

Pour les fonctions $\{f_{4,k}\}$, ce ne sera pas possible ; il faut donc trouver une autre manière de les visualiser, en utilisant encore une dimension de moins.

Pour ce faire, regardons l'équivalent de la figure 5 mais en ne conservant que les courbes d'un seul ensemble de niveau, comme dans les figures 7 et 8, qui sera $f_{2,k}(x, y) = 0$. La courbe du graphe est en orange si l'image de la fonction est positive et en bleu sinon.

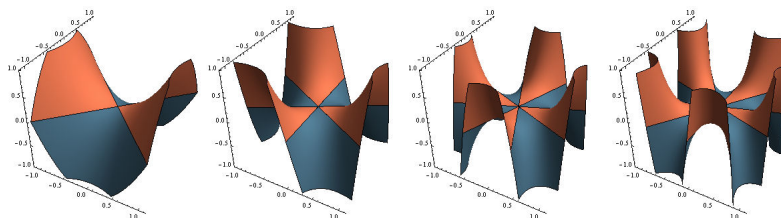


FIGURE 11. Graphe des fonctions $f_{2,1}$ à $f_{2,4}$, colorés selon le signe, autour de l'origine

Définition 4 : Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on notera $L_N(f)$ et $L_P(f)$ les ensembles de points x du domaine pour lesquels $f(x)$ est négative, ou positive, respectivement.

Reprenons donc maintenant l'équivalent de la figure 6 mais adapté à l'image précédente. On a que les $\{L_N(f_{2,k})\}$ sont en bleu et les $\{L_P(f_{2,k})\}$ sont en orange. Les courbes de niveau $f_{2,k}(x, y) = 0$ sont, quant à elles, en noir.

Notons que les bordures noires qui sont tangentes à S^1 ne font pas partie des courbes de niveau ; elles ne font que représenter les pré-images des bordures des graphes de la figure 11.

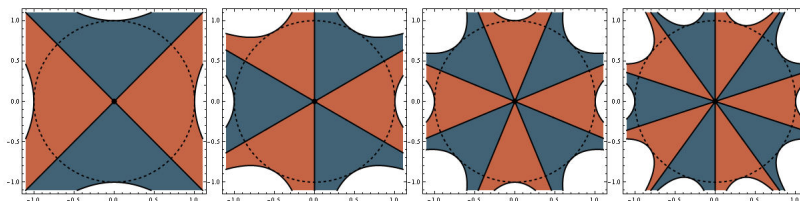


FIGURE 12. Ensembles L_N , en bleu, et L_P , en orange, des fonctions $f_{2,1}$ à $f_{2,4}$ autour de l'origine

Le choix des fonctions $\{f_{2,k}\}$, qui est de prendre la partie réelle d'une puissance entière d'un nombre complexe, a la particularité de diviser \mathbb{R}^2 en pointes de pizza (ou de tarte, au goût) qui appartiennent en alternance aux ensembles L_N et L_P .

De plus, à cause de ceci, si on restreint la visualisation de ces deux sous-ensembles à un cercle centré à l'origine, on s'aperçoit que le cercle est divisé en courbes de même longueur colorées, elles aussi, en alternance.

Or, la dimension d'un cercle étant de 1, on est parvenu à percevoir une caractéristique des fonctions $\{f_{2,k}\}$ en n'utilisant qu'un objet d'une dimension, mais qui nécessite tout de même deux dimensions pour être visualisé.

À partir d'ici, on peut tout simplement utiliser la projection stéréographique pour envoyer le cercle, moins un point de projection, sur une droite qui, elle, peut être visualisée en n'utilisant qu'une seule dimension.

Choisissons donc comme cercle S^1 et projetons-le sur la droite $y = -1$ à partir du point $(0, 1)$. Voici, combinées en une seule image, l'intersection des L_N et L_P avec S^1 et à quoi elle ressemble lorsque projetée sur la droite en question.

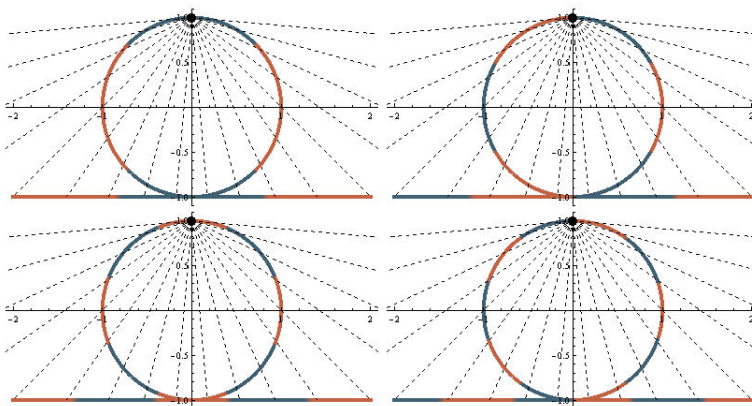


FIGURE 13. Visualisation et projection de l'intersection de S^1 avec les L_N et L_P des fonctions $f_{2,1}$ à $f_{2,4}$

On peut aussi faire un traitement similaire pour le cas $n = 3$, c'est-à-dire de visualiser directement les L_N et L_P , leur intersection avec S^2 puis enfin le résultat lorsque projeté sur un plan $z = c$. On espère ainsi retrouver un motif cyclique comme dans le cas $n = 2$.

Dans un premier temps, on peut avoir une bonne idée de ce à quoi ressemblent les L_N et L_P des fonctions $f_{3,1}$ à $f_{3,4}$ pour $\lambda_3 = \pm 1$ en regardant les figures 7 et 8.

En effet, puisque ces dernières montrent l'ensemble de niveau $f_{3,k}(x, y, z) = 0$, on s'attend à ce qu'un des deux sous-ensembles soit compris à l'intérieur des $k + 1$ courbes avec l'autre occupant tout l'extérieur de celles-ci. On aurait donc un sous-ensemble connexe et l'autre non.

C'est bel et bien ce qui se passe. Sur les deux images suivantes, on voit que lorsque $\lambda_3 = 1$, les L_N sont l'union de $k + 1$ volumes tandis que les L_P ne sont formés que d'un volume. À l'inverse, lorsque $\lambda_3 = -1$, les L_N ne sont qu'un volume et les L_P , $k + 1$.

Spécifions que le degré de l'origine est $-k$ si $\lambda_3 = 1$ et k si $\lambda_3 = -1$.

Ensuite, prenons l'intersection des L_N et L_P avec S^2 et projetons-la sur un plan $z = c$ à partir du point $(0, 0, 1)$. Ici, le choix de c est $c = \frac{1}{4}$ pour faire en sorte

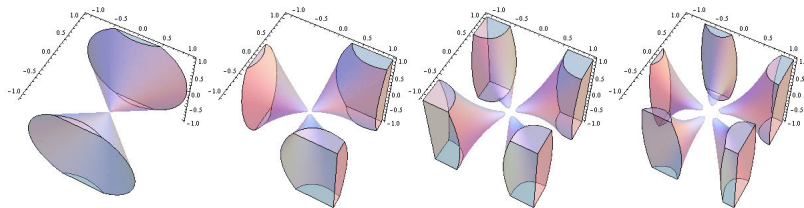


FIGURE 14. Visualisation des L_N des fonctions $f_{3,1}$ à $f_{3,4}$ autour de l'origine ($\lambda_3 = 1$)

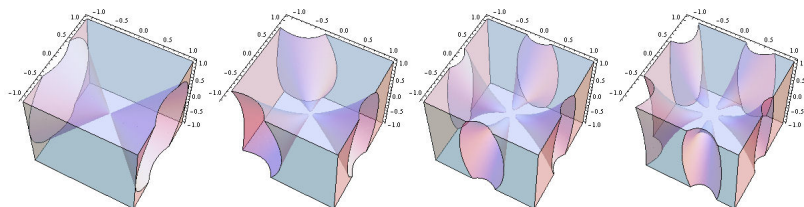


FIGURE 15. Visualisation des L_N des fonctions $f_{3,1}$ à $f_{3,4}$ autour de l'origine ($\lambda_3 = -1$)

que l'intersection avec le sous-ensemble qui est constitué de $k + 1$ volumes, qui est L_N ou L_P selon λ_3 , puisse être visualisée au complet sur le plan de projection.

En fait, plus le plan de projection est près du point de projection, plus les motifs en forme de goutte, qu'on voit sur les deux figures qui viennent, sont concentrés autour de l'origine.

Pour faciliter la visualisation, il y aura deux exemplaires du plan de projection. Le vrai plan, $z = \frac{1}{4}$, est translucide pour qu'on puisse bien voir S^2 et sa copie, $z = -2$, est opaque pour qu'on puisse bien voir la projection.

On y reprend le même code de couleurs que sur les figures 11, 12 et 13 ; les L_N en bleu et les L_P en orange. Le point de projection est aussi mis en évidence.

Notons, qu'on peut les comparer aux figures 14 et 15 pour bien comprendre ce qui se produit.

Nous en sommes finalement arrivés à visualiser le cas où $n = 4$ à l'aide des projections. Le point de projection choisi est $(0, 0, 0, 1)$ avec comme volume de projection $w = \frac{2}{11}$.

Il y a cette fois quatre possibilités pour les fonctions $\{f_{4,k}\}$, selon les valeurs du couple (λ_3, λ_4) . Les couples $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ donnent un degré de $-k$ à l'origine et s'avèrent à être similaires. Les couples $(-1, 1)$ et $(1, -1)$, quant à eux, donnent un degré de k à l'origine et sont eux aussi similaires.

La similitude discutée est celle qu'on remarque avec les figures 14 et 15 ; il s'agit du fait que les L_N d'une image ressemblent en forme aux L_P de l'autre image et vice-versa. Ils sont aussi aux mêmes endroits à une rotation de $\frac{\pi}{k+1}$ degrés autour de l'axe des z . Ici, il ne s'agit pas des L_N et L_P mais bien de leur intersection avec S^3 .

Présentons d'abord le cas où le degré de l'origine est $-k$ car c'est celui qui ressemblent le plus aux gouttes obtenues dans les figures 16 et 17.

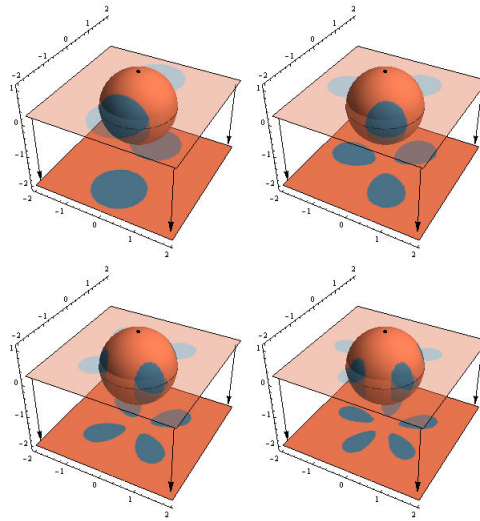


FIGURE 16. Visualisation et projection de l'intersection de S^2 avec les L_N et L_P des fonctions $f_{3,1}$ à $f_{3,4}$ ($\lambda_3 = 1$)

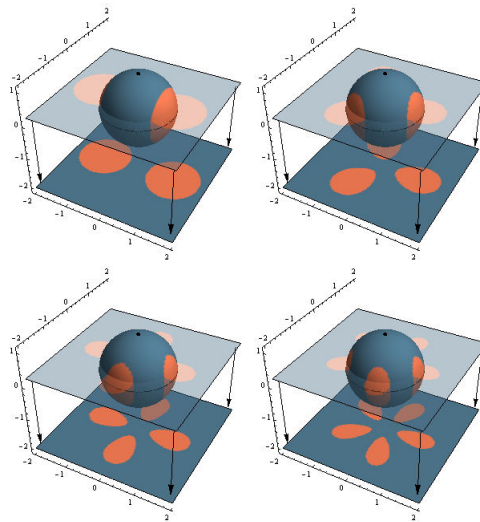


FIGURE 17. Visualisation et projection de l'intersection de S^2 avec les L_N et L_P des fonctions $f_{3,1}$ à $f_{3,4}$ ($\lambda_3 = -1$)

Comme on peut le voir, les gouttes sont maintenant en 3D et disposées de même manière autour de l'origine.

Le cas où le degré de l'origine est k produit des intersections avec S^3 qui n'ont rien à voir avec les gouttes ci-hautes. Les volumes obtenus sont, si on veut, des k -beignes et leur extérieur, où un k -beigne est un beigne avec $k + 1$ poignées. De plus, ils sont tous connexes.

Cette importante différence motive aussi qu'on parle de types de point de selle multiple, tout comme le degré, comme exprimé à la fin de la section 3.

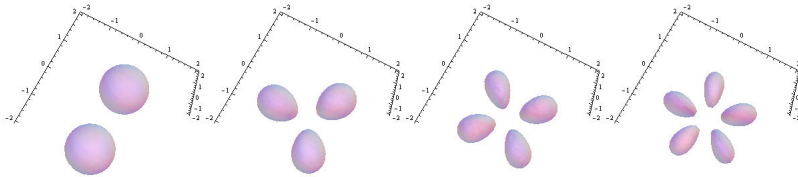


FIGURE 18. Visualisation de la projection de l'intersection de S^3 avec les L_N des fonctions $f_{4,1}$ à $f_{4,4}$ ($\lambda_3 = 1, \lambda_4 = 1$)

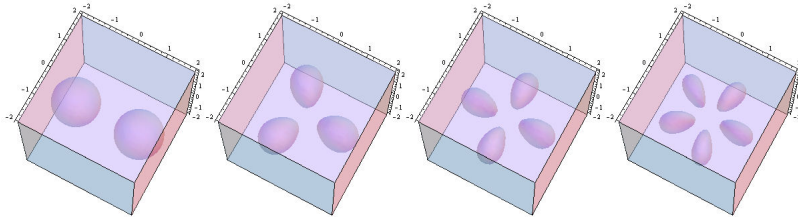


FIGURE 19. Visualisation de la projection de l'intersection de S^3 avec les L_N des fonctions $f_{4,1}$ à $f_{4,4}$ ($\lambda_3 = -1, \lambda_4 = -1$)

Voyons de quoi ont l'air ces k -beignes. Pour mieux les voir, deux vues des mêmes volumes sont affichées à la figure 20. Une seule vue est donnée à la figure 21 dû à la similitude des formes.

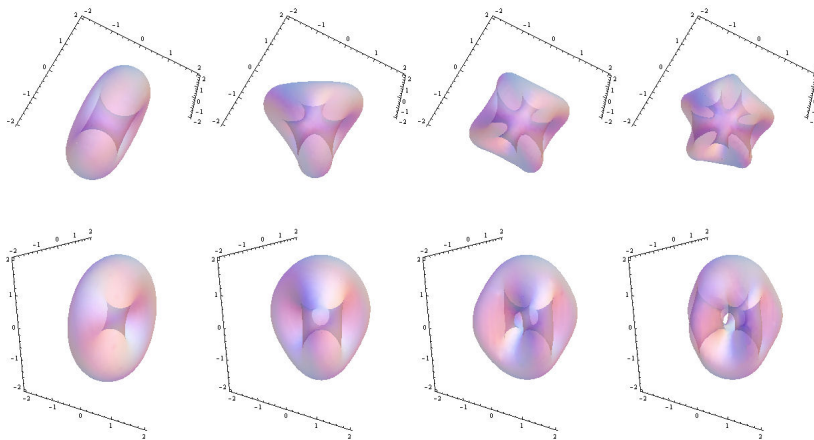


FIGURE 20. Visualisation de la projection de l'intersection de S^3 avec les L_N des fonctions $f_{4,1}$ à $f_{4,4}$ ($\lambda_3 = -1, \lambda_4 = 1$)

5. Conclusion

Les calculs présentés dans la deuxième section ainsi que les caractéristiques visualisées dans les sections 3 et 4 laissent présager qu'il y a des types de points de selle multiple, du moins pour ceux des fonctions $\{f_{n,k}\}$.

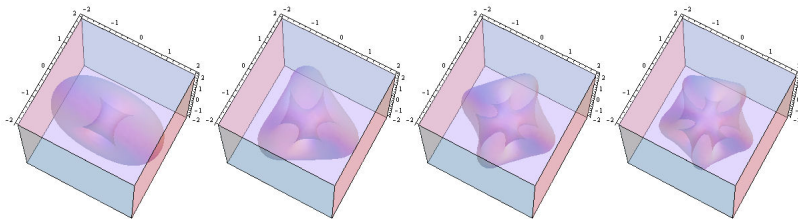


FIGURE 21. Visualisation de la projection de l'intersection de S^3 avec les L_N des fonctions $f_{4,1}$ à $f_{4,4}$ ($\lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1$)

D'une part, le degré d'un tel point est soit k , soit $-k$ et d'autre part, on a vu que l'intersection avec une sphère unitaire des L_N et L_P donnaient des sous-ensembles dont la connexité variait.

Il serait bien entendu intéressant de poursuivre l'étude sur cette famille de fonctions en essayant de classifier tous les types de leur unique point critique, qui est dégénéré, l'origine.

Cette étude pourrait se faire en utilisant l'analyse et en étant peut-être alimentée par plus de moyens de visualisation, notamment pour les cas $n > 4$.

On pourrait aussi considérer d'autres fonctions que celles présentées qui auraient la particularité d'aussi générer un point de selle multiple. Des méthodes de visualisation similaires à celles du texte pourraient aider à cibler de telles fonctions.

À propos de ceci et dans un autre effort de généralisation des fonctions $\{f_k\} = \{f_{2,k}\}$, il serait peut-être bon d'étudier la famille suivante, définie sur \mathbb{R}^4 en utilisant la partie réelle d'une puissance d'un quaternion. Notons cette famille $\{Q_l\}$ et posons

$$Q_l : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } Q_l(x, y, z, w) = \Re\left((x + iy + jz + kw)^{l+1}\right)$$

où i, j et k définissent l'algèbre des quaternions par $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Voici un tableau donnant les fonctions Q_1 à Q_4 . On peut remarquer que, tout comme les fonctions $\{f_{2,k}\}$ et contrairement aux fonctions $\{f_{4,k}\}$, elles sont homogènes et, par conséquent, on a que, $\forall c \in \mathbb{R}, Q_l(cx, cy, cz, cw) = c^{l+1}Q_l(x, y, z, w)$.

Notons aussi que $Q_1 = f_{4,1}$ lorsque $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$.

TABLE 7. Q_l pour $1 \leq l \leq 4$

l	Q_l
1	$x^2 - y^2 - z^2 - w^2$
2	$x^3 - 3xy^2 - 3xz^2 - 3xw^2$
3	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 6x^2z^2 + 2y^2z^2 + z^4 - 6x^2w^2 + 2y^2w^2 + 2z^2w^2 + w^4$
4	$x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 - 10x^3z^2 + 10xy^2z^2 + 5xz^4 - 10x^3w^2 + 10xy^2w^2 + 10xz^2w^2 + 5xw^4$

La prochaine et dernière image visualise les projections stéréographiques de l'intersection de S^3 avec les L_N des fonctions Q_1 à Q_8 . Le point de projection est $(0, 0, 0, 1)$ et le volume de projection est $w = 0$.

Précisons deux similitudes remarquantes que cette figure a avec la figure 13 et qu'aucune des figures 18 à 21 ne possèdent.

Premièrement, comparons les droites $y = 0$ de la figure 13 avec les droites $(y, z) = (0, 0)$ des projections à la première rangée. Imaginons que ces dernières sont colorées en bleu et en orange selon leur intersection avec les sous-ensembles $L_N \cap S^3$ et $L_P \cap S^3$, respectivement.

Et bien on peut remarquer qu'à partir de l'origine, ces droites sont colorées identiquement par rapport à l'ordre des couleurs et au nombre de régions de chaque couleur.

Deuxièmement, les $L_N \cap S^3$ et $L_P \cap S^3$ sont tous non-connexes, sauf dans le cas où $l = 1$.

Voilà donc, pour terminer, la figure en question.

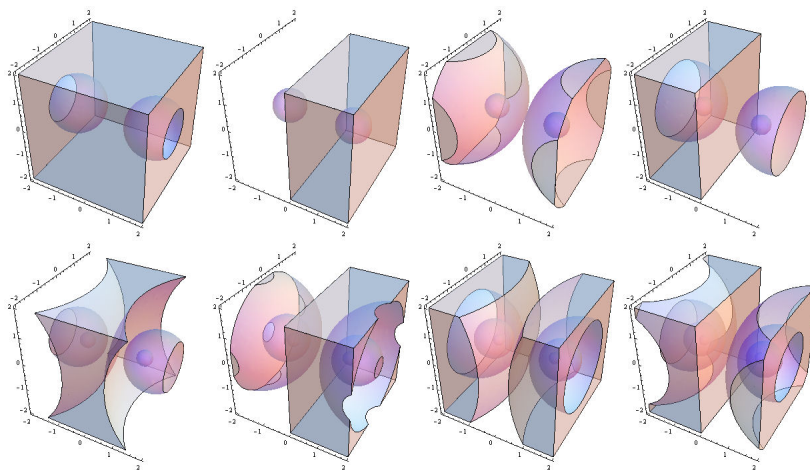


FIGURE 22. Visualisation de la projection de l'intersection de S^3 avec les L_N des fonctions Q_1 à Q_8

Références

- [1] André Delachet. *Le Calcul vectoriel*. Presses Universitaires France (Sep 1 1979), 1979.
- [2] Sara Derivière, Tomasz Kaczynski, and Pierre-Olivier Vallerand. *On the decomposition and local degree of multiple saddles*. Ann. Sci. Math. Québec 33 (2009), no 1, 45-62, Mai 2008.
- [3] N. G. Lloyd. *Degree theory*. Cambridge Tracts in Math., vol. 73, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Great Britain, 1978.
- [4] Wikipedia. *Quaternion* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. <http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>, 2010.
- [5] Wikipedia. *Stereographic projection* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. http://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection, 2010.

RÉMI GAGNÉ, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
 Courriel: remi.gagne@usherbrooke.ca