

GROUPE DE TRESSES ET LES SURFACES HYPERELLIPTIQUES

FÉLIX CAMIRAND

RÉSUMÉ.

Étant donné une courbe hyperelliptique

$$F = \{(\lambda, \mu) : \mu^2 = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i), \lambda, \mu \in \mathbb{C}P^1\}$$

où $n = 2g + 1$ ou $n = 2g + 2$, on y associe un revêtement ramifié

$$p : F \rightarrow \mathbb{C}P^1$$

à deux feuillets avec $2g + 2$ points de ramifications. Le théorème d'Arnold [1] stipule que l'action du groupe de tresses sur le groupe d'homologie $H_1(F)$ coïncide avec le groupe des matrices symplectiques $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ seulement dans les cas où $n = 3$, $n = 4$ et $n = 6$. En ce qui a trait au cas où n est différent de 3, 4 et 6, il existe au moins une matrice qui ne peut être représentée comme l'action du groupe de tresses sur le groupe d'homologie $H_1(F)$. Dans cet article, nous allons montrer que l'action du groupe de tresses sur le groupe d'homologie $H_1(F)$ correspond à un sous-groupe du groupe des matrices symplectiques $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$.

1. Revêtement Ramifié

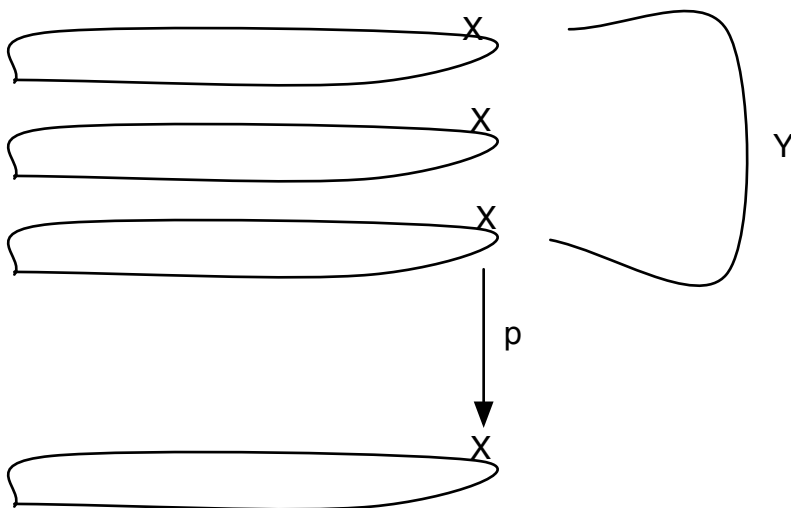
Dans cette section, nous allons introduire une notion essentielle à la compréhension de cet article, soit celle de revêtement ramifié. Soient X et Y , deux espaces topologiques. Un revêtement

$$p : Y \rightarrow X$$

est une application continue et surjective tel que, pour tout point x dans X , il existe un ouvert U contenant x tel que $p^{-1}(U)$ est une réunion disjointe d'ensembles ouverts dans Y , réunion dans laquelle chaque composante de $p^{-1}(U)$ est homéomorphe à U , et l'homéomorphisme est établi par p .

Je tiens à remercier Vasilisa Shramchenko qui a su m'épauler et me soutenir tout au long de ce processus de recherche. Ses judicieuses remarques ont brillamment éclairé ce long chemin parfois sinueux qui a mené à la rédaction de cet article. Je tiens à remercier aussi toute l'équipe du CAMUS sans qui cet ouvrage n'aurait pas été possible.

FIGURE 1. Exemple de Revêtement



Par exemple, si X est un espace topologique, que Y se compose de trois copies de X , et que p est la projection de Y sur X , alors

$$p: Y \rightarrow X$$

est un revêtement, comme on peut le voir à la figure 1.

Soient X et Y , deux surfaces connexes orientables et compactes. On dit que

$$p: Y \rightarrow X$$

est un revêtement ramifié si :

- (1) p est continu, surjectif et préserve l'orientation.
- (2) Il existe un ensemble fini de points de X , $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, tel que p soit un revêtement de

$$X \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

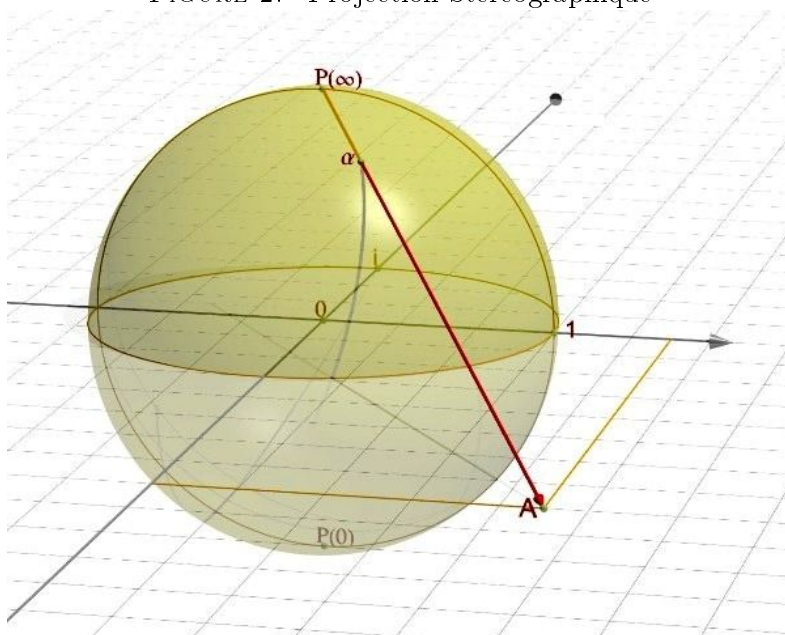
- (3) Pour tout λ_i , où i varie entre 1 et n , il existe un voisinage U_i dans lequel se trouve λ_i et une coordonnée complexe x dans U_i , et pour tout point dans $p^{-1}(\lambda_i)$, il existe une coordonnée complexe z tel que

$$x = p(z) = z^k$$

dans le voisinage de ce point de $p^{-1}(\lambda_i)$.

Il est à noter qu'il y a toujours un nombre fini de points de ramification $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ pour X et Y compactes. Tous les points qui sont réguliers, c'est-à-dire qui ne sont pas des points de ramification, ont le même nombre de pré-images sous p . Ce nombre est appelé le degré du revêtement. Les points de ramification sont les points qui comporte moins de pré-image que les autres. Dans cet article, nous nous intéresserons à un type de revêtements ramifiés dans lequel les points réguliers n'ont que deux pré-images. Nous verrons dans la prochaine section un exemple qui rendra ce concept plus clair.

FIGURE 2. Projection Stéréographique



2. Revêtement Ramifié Hyperelliptique

Cette section traitera de la construction d'un revêtement ramifié associé à une courbe hyperelliptique de la forme

$$F = \{(\lambda, \mu) : \mu^2 = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i), \lambda, \mu \in \mathbb{C}P^1\}$$

car c'est uniquement ce type de revêtement ramifié qui sera étudié dans cet article.

Avant de débiter cette construction, nous allons introduire une notion dont nous aurons besoin tout au long de cet article, c'est-à-dire celle de la droite projective complexe, que nous noterons $\mathbb{C}P^1$. Lorsque l'on prend la sphère unité de \mathbb{R}^3 , et que l'on effectue une projection stéréographique (voir figure 2) à partir d'un pôle P de la sphère sur le plan de \mathbb{R}^2 passant par l'équateur, on obtient une correspondance entre ce plan de \mathbb{R}^2 et tout point de la sphère, mis à part le point P . Ainsi, en faisant correspondre l'infini au point P , on a une bijection entre la sphère et $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, ce qui est la même chose que $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On appelle l'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la droite projective complexe, que l'on note $\mathbb{C}P^1$. Cet ensemble est donc, bien évidemment, fermé et borné.

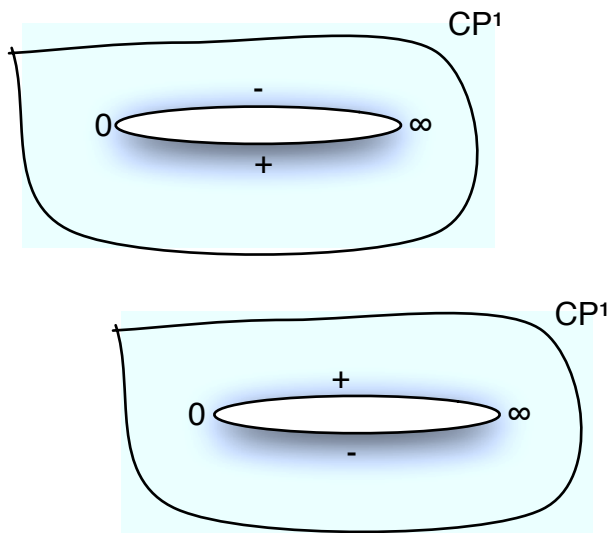
D'abord, pour $n = 1$. On a alors

$$\mu^2 = \lambda - \lambda_1, \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C}P^1.$$

Prenons simplement le cas où λ_1 est égal à zéro. Posons

$$\lambda = re^{i\theta}.$$

FIGURE 3. Construction de la Courbe hyperelliptique



Alors,

$$\mu = \sqrt{\lambda} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\theta}{2} + ik\pi}, \quad k = 0, 1$$

et on a une courbe

$$\mathcal{C} = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \mid \mu^2 = \lambda\}.$$

Ainsi, on voit bien que pour chaque valeur de λ , il y a deux valeurs de μ possibles, sauf dans le cas de $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$. Ce sont les points de ramification du revêtement

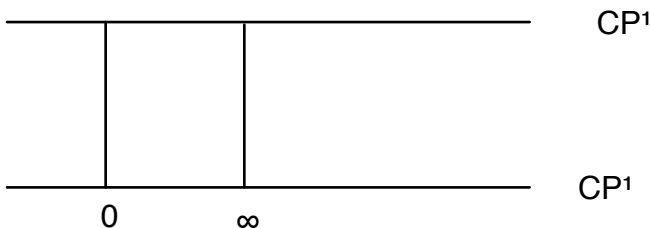
$$p : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1$$

$$(\mu, \lambda) \mapsto \lambda.$$

C'est pourquoi, si on souhaite tracer le graphe dans $(\mathbb{C}P^1)^2$, il faut avoir recours à deux couches.

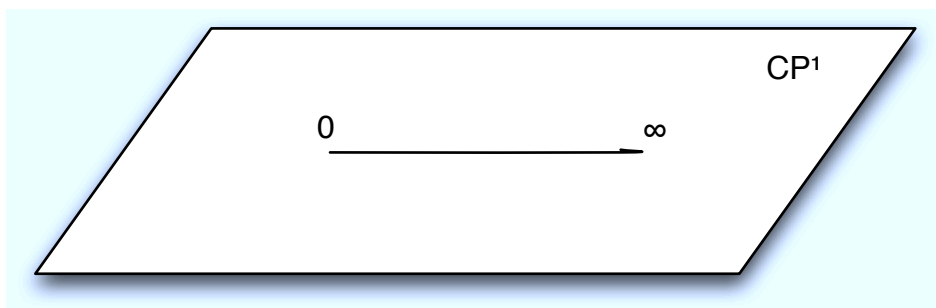
L'idée consiste à prendre deux copies de $\mathbb{C}P^1$, et d'effectuer une coupure entre 0 et l'infini sur chacune des copies, pour ensuite séparer et identifier les deux rives, pour enfin coller ensemble les rives opposées, comme indiqué sur la figure 3. On a alors, entre les deux copies de $\mathbb{C}P^1$, une structure en spirale, et on passe d'une couche à l'autre lorsque θ va de 0 à 2π . On peut représenter la courbe hyperelliptique de plusieurs manières, dont deux nous seront particulièrement utiles, soit le diagramme de Hurwitz (figures 4 et 6) et la représentation vue du dessus (figures 5 et 7). Dans la représentation par le diagramme de Hurwitz, chaque étage représente une couche, et on passe d'une couche à une autre en passant par la coupure entre 0 et l'infini. Les barres verticales sont les points de ramification des deux couches, soit les points qui se trouvent sur deux couches en même temps.

FIGURE 4. Diagramme de Hurwitz pour $n=1, \lambda_1 = 0$



Les barres verticales indiquent les points de ramification, et ainsi que c'est le même point qui se retrouve sur les deux couches.

FIGURE 5. Représentation Vue du Dessus pour $n=1$



Maintenant, supposons que l'on a une courbe hyperelliptique de la forme

$$\mathcal{C} = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{C}P^{1^2} \mid \mu^2 = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)\}$$

avec $n = 2g + 1$. Dans ce cas, on voit qu'il y a $2g + 1$ point de ramifications de type «fini», qui sont $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2g+1}\}$. Le degré du polynôme en λ est impair. Il y a donc un point de ramification à l'infini. Si on a une courbe hyperelliptique de la forme

$$\mu^2 = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$$

avec $n = 2g + 2$, alors on a $2g + 2$ points de ramification de type «fini». Il n'y a aucun point de ramification à l'infini. Ainsi, dans les deux cas, on a toujours $2g + 2$ points de ramification.

La manière de construire un revêtement ramifié à $2g+2$ points de ramification est la suivante :

FIGURE 6. Diagramme de Hurwitz pour $n = 2g + 2$

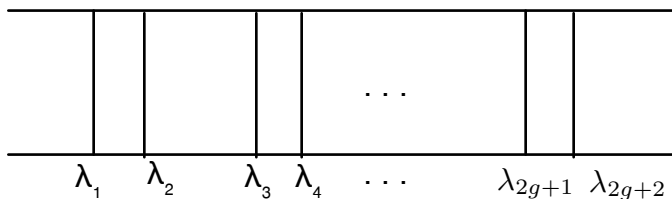
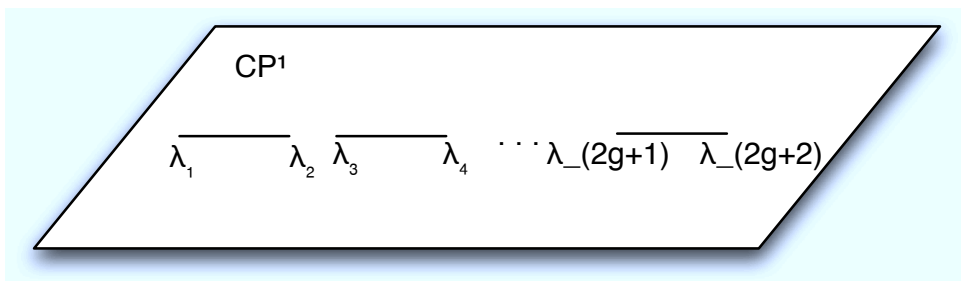


FIGURE 7. Représentation Vue du Dessus pour $n = 2g + 2$



- (1) On forme $g + 1$ couples de points. Chaque point doit se retrouver dans un et un seul couple.
- (2) On procède comme dans le cas précédent : On se prend d'abord deux copies de \mathbb{CP}^1 .
- (3) Pour chacun des couples de points, on coupe entre les deux points du couple, on identifie les deux rives, et on colle les rives opposées ensemble.

3. Groupe Symplectique

Une matrice A de dimension $2g \times 2g$ à coefficient dans \mathbb{Z} est dite symplectique si elle préserve les formes bilinéaires antisymétriques, ou plus simplement, si elle respecte la condition suivante :

$$A^T J A = J, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans cette section, nous étudierons quelques propriétés des matrices symplectiques, puisque c'est ce type de matrice que nous allons utiliser pour caractériser l'action du groupe de tresses (que nous allons définir à la prochaine section) sur les points de ramification d'une surface hyperelliptique. On remarque ainsi que si A est une matrice symplectique, alors A est inversible, et son inverse est donnée par

$$A^{-1} = -J A^T J$$

qui est aussi une matrice symplectique à coefficient dans \mathbb{Z} . Enfin, si A et B sont des matrices symplectiques de dimension $2g \times 2g$ à coefficient dans \mathbb{Z} , on a que

$$A^T J A = J$$

et

$$B^T J B = J$$

et ainsi

$$(AB)^T J (AB) = B^T A^T J A B = B^T J B = J.$$

On en conclue donc que le produit de deux matrices symplectiques est aussi une matrice symplectique, ce qui confère à l'ensemble des matrices symplectiques une structure de groupe avec le produit matriciel usuel. Tout au long de cet article, le groupe symplectique se constituant des matrices de dimension $2g \times 2g$ à coefficient dans \mathbb{Z} sera noté $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$.

Soit H , une matrice de $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$, telle que

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

où A, B, C et D sont des matrices de dimension $g \times g$ à coefficient dans \mathbb{Z} . H est une matrice de $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$, ce qui équivaut à écrire que

$$H^T J H = J$$

et donc que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = J$$

ou plus simplement

$$\begin{bmatrix} A^T C - C^T A & A^T D - C^T B \\ C^T B - A^T D & D^T B - B^T D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut montrer que, pour g supérieur ou égal à 2, le groupe symplectique est engendré par trois types de matrices.

- (1) Les matrices de translation. Ces matrices sont de la forme

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} I_g & S \\ 0 & I_g \end{bmatrix}$$

où $S = S^T$. Soient deux matrices de translation A et B tel que

$$A = \begin{bmatrix} I_g & S_1 \\ 0 & I_g \end{bmatrix}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} I_g & S_2 \\ 0 & I_g \end{bmatrix}.$$

Alors, on a que

$$AB = \begin{bmatrix} I_g & S_1 \\ 0 & I_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_g & S_2 \\ 0 & I_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g & S_1 + S_2 \\ 0 & I_g \end{bmatrix}.$$

On en déduit aisément que les matrices de translation forment un groupe pour la multiplication matricielle usuelle.

(2) Les matrices de rotation. Ces matrices sont de la forme

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R^{-1T} \end{bmatrix}$$

avec R une matrice de dimension $g \times g$ et à coefficient dans \mathbb{Z} tel que le déterminant de R soit égal à ± 1 . Soient deux matrices de rotation A et B tel que :

$$A = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_1^{-1T} \end{bmatrix}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_2^{-1T} \end{bmatrix}.$$

Alors

$$AB = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_1^{-1T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_2^{-1T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 R_2 & 0 \\ 0 & (R_1 R_2)^{-1T} \end{bmatrix}.$$

Il est alors clair que les matrices de rotation forment un groupe pour la multiplication matricielle usuelle.

(3) Les matrices semi-involutives. Ces matrices sont de la forme

$$\begin{bmatrix} D & I - D \\ D - I & D \end{bmatrix}$$

où D est une matrice diagonale avec les éléments diagonaux égaux à 0 ou à 1.

Regardons plus en détail le cas dans lequel $g = 2$, puisque c'est le cas qui nous intéresse dans cet article. Le groupe de translation est alors engendré par trois matrices :

$$\mathcal{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{S}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On sait déjà que le groupe des matrices unimodulaires ayant deux lignes et deux colonnes à coefficient dans \mathbb{Z} peut être engendré par trois matrices :

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On en déduit simplement que le groupe des matrices de rotation est engendré par trois matrices :

$$\mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{R}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Enfin, pour $g=2$, il existe seulement trois matrices semi-involutives, qui sont l'identité I_4 , et

$$\mathcal{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En mettant tout cela ensemble, on remarque que :

- $\mathcal{S}_2 = \mathcal{R}_1 \mathcal{S}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{S}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1^{-1} \mathcal{S}_1^{-2} (\mathcal{R}_2 \mathcal{S}_1^{-1} \mathcal{R}_2)$
- $\mathcal{S}_3 = \mathcal{R}_2 \mathcal{S}_1 \mathcal{R}_2$
- $\mathcal{R}_3 = \mathcal{G}_1^2$
- $\mathcal{S}_3 = \mathcal{R}_2 \mathcal{G}_1 \mathcal{R}_2$.

On en conclue donc que le groupe symplectique $Sp_4(\mathbb{Z})$ est engendré par ces quatre matrices, soit $\mathcal{S}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ et \mathcal{G}_1 . Il est possible de montrer que ces quatre matrices sont aussi indépendantes.

4. Groupe de tresses

On appelle le groupe de tresses à n brins le groupe engendré par $n - 1$ générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ soumis aux relations suivantes : Pour tout i, j variant entre 1 et $n - 1$,

- (1) Si $|i - j| > 1$, alors $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$
- (2) Si $|i - j| = 1$, alors $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$.

On visualise ce groupe comme suit. Prenons n points à gauche et n points à droite, reliés par n brins, chacun des brins ayant un point à gauche et un point à droite comme extrémité. Le générateur σ_i agit sur les points i et $i + 1$ en les échangeant. La tresse σ_i^{-1} agit elle aussi sur les points i et $i + 1$.

Par exemple, si on considère le groupe de tresses B_4 , on se retrouve avec avec trois générateurs :

- (1) σ_1 :



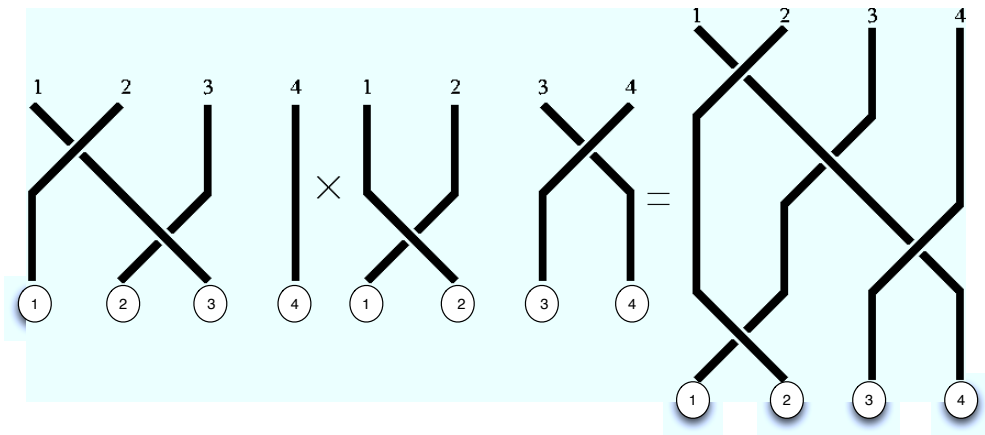
- (2) σ_2 :



- (3) σ_3 :



FIGURE 8. Produit de tresses



σ_1^{-1} est alors représenté de la manière suivante :



L'opération de ce groupe est appelée produit de tresses, et s'effectue de la manière suivante : étant donné deux tresses a et b , le produit de $a \times b$ est obtenu en concaténant les deux tresses, c'est-à-dire en ajoutant la tresse b à la suite de la tresse a , comme on peut le voir à la figure 8.

5. Groupe d'homologie

Avant de poursuivre, nous allons définir une notion qui nous sera essentielle pour la compréhension du théorème d'Arnold, celle du groupe d'homologie. Dans le but de pouvoir définir clairement ce qu'est le groupe d'homologie, nous allons revenir sur quelques notions fondamentales. La première de ces notions est celle d'homotopie. Étant donné deux chemins continus γ_0 et γ_1 ayant le même point de départ ainsi que le même point d'arrivée dans un espace topologique X , on dit que γ_0 et γ_1 sont homotopes s'il est possible de déformer l'un pour obtenir l'autre de manière continue (voir figure 9). En d'autres termes, si on a :

$$\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow X, \quad \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$$

avec $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, alors γ_0 et γ_1 sont homotopes s'il existe une fonction continue

$$H : [0, 1]^2 \rightarrow X$$

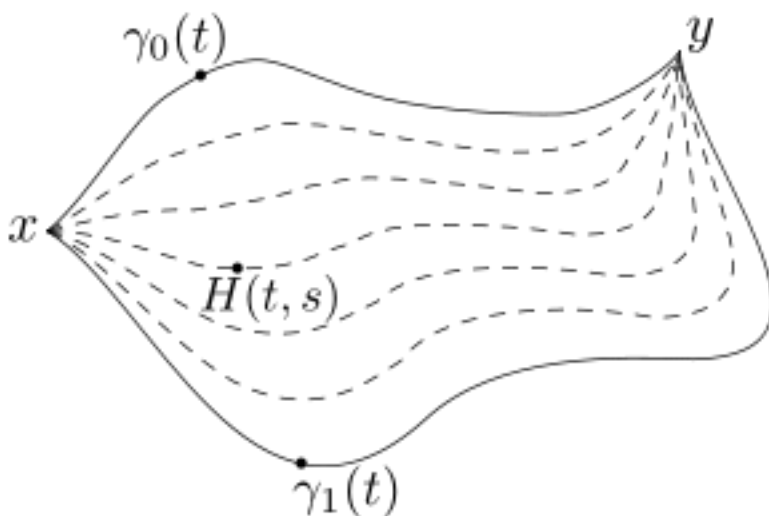
tel que

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), H(t, 1) = \gamma_1(t) \text{ pour tout } t \in [0, 1]$$

et

$$H(0, s) = \gamma_0(0) \text{ et } H(1, s) = \gamma_0(1) \text{ pour tout } s \in [0, 1].$$

FIGURE 9. Homotopie



L'homotopie est une relation d'équivalence. Maintenant, passons à la notion de groupe fondamental. Étant donné un espace topologique X et un point $x \in X$, le groupe fondamental basé en x , noté $\pi_1(X, x)$, est l'ensemble des classes d'équivalence des chemins orientés dans X débutant et se terminant en x . Cet ensemble est un groupe pour la composition de chemins. Pour X connexe,

$$\pi_1(X, x) = \pi_1(X, \hat{x}) \quad \forall x, \hat{x} \in X.$$

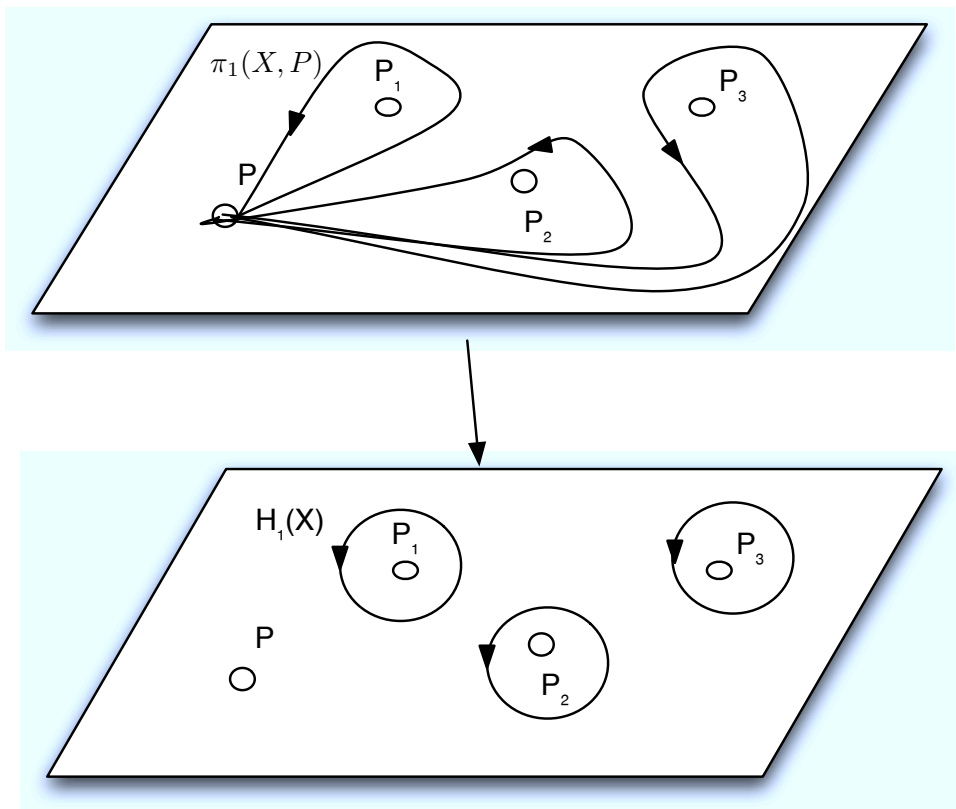
Enfin, on appelle le premier groupe d'homologie $H_1(X)$ le groupe fondamental $\pi_1(X)$ factorisé par la relation

$$\gamma_1 \gamma_2 = \gamma_2 \gamma_1 \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(X).$$

Prenons un exemple. Soit $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2, P_3\}$ et prenons P dans X . On peut voir la comparaison entre le groupe fondamental $\pi_1(X, P)$ et le groupe d'homologie $H_1(X)$ à l'aide des générateurs de ces groupes dans la figure 10.

Pour conclure cette section, nous allons introduire la notion d'indice d'intersection de deux chemins à l'aide de l'exemple illustré de la figure 11. Étant donné deux chemins a et b , et que a et b ne se croisent qu'une seule fois, et que l'on souhaite connaître l'indice d'intersection $a.b$, alors, on s'intéresse au repère cartésien formé par a et b dans le voisinage de l'intersection. Si ce repère est positif, alors l'indice d'intersection $a.b$ vaut 1. Sinon, il vaut -1 . Si a et b se croisent plus d'une fois, alors l'indice d'intersection $a.b$ a la valeur de la somme sur toutes les intersection entre a et b des indices d'intersection obtenus de la manière dont on vient de la décrire. De plus, on dira que $a.a$ vaut 0. Ainsi, si $a.b$ vaut 1, alors $b.a$ vaut -1 et ainsi l'indice d'intersection est une forme biinéaire antisymétrique. Nous soulignerons plus tard que c'est la raison pour laquelle les matrices symplectiques apparaissent.

FIGURE 10. Générateurs du groupe fondamental et Générateurs du groupe d'homologie



6. Application de monodromie d'un revêtement ramifié

Si on fixe r points distincts Q_1, \dots, Q_r de $\mathbb{C}P^1$ et que l'on note $\widehat{\mathbb{C}P^1} = \mathbb{C}P^1 \setminus \{Q_1, \dots, Q_r\}$, choisissons un point Q dans notre nouvel ensemble $\widehat{\mathbb{C}P^1}$. Ensuite, supposons que l'on ait un revêtement ramifié

$$f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1$$

branché aux points Q_i . Enfin, soit

$$\widehat{f} : \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}P^1}$$

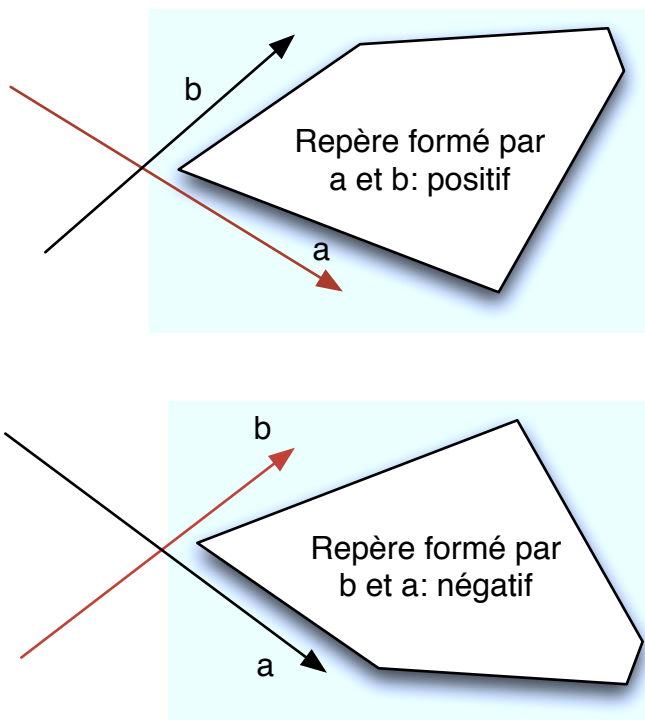
le revêtement induit, c'est-à-dire le revêtement tel que, pour tout z dans $\widehat{\mathcal{C}}$, on a $\widehat{f}(z) = f(z)$.

Si γ est une boucle orientée basée en Q et $P \in \widehat{\mathcal{C}}$ est un point dans la préimage de Q sous f , alors il existe un unique chemin $\bar{\gamma}_P$ dans \mathcal{C} qui commence en P se terminant nécessairement dans $f^{-1}(Q)$, et tel que $f(\bar{\gamma}_P) = \gamma$.

Si on note le point d'arrivée de $\bar{\gamma}_P$ par $\mu(\bar{\gamma}_P)$, on a alors une fonction

$$h_{\mu(\bar{\gamma}_P)} : f^{-1}(Q) \rightarrow f^{-1}(Q)$$

FIGURE 11. Indice d'intersection



$$P \mapsto \mu(\bar{\gamma}_P).$$

On voit tout de suite que $h_{\mu(\bar{\gamma}_P^{-1})} = h_{\mu(\bar{\gamma}_P)}^{-1}$, car $\bar{\gamma}_P^{-1}$ n'est rien d'autre que le chemin $\bar{\gamma}_P$ parcouru dans le sens contraire, donc le point d'arrivée devient le point de départ, et réciproquement. Tout ceci induit un homomorphisme

$$h_\mu : \pi_1(\widehat{\mathbb{C}P^1}, Q) \rightarrow S_d.$$

qui associe à une boucle orientée de $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}P^1}, Q)$ une permutation $\sigma = h_\mu(\gamma)$ de S_d tel que si on numérote les points P_1, \dots, P_d de $f^{-1}(Q)$, et que σ permute les points de cet ensemble, alors $\sigma(P_i) = \mu(\bar{\gamma}_{P_i})$. On appelle cette application l'application de monodromie.

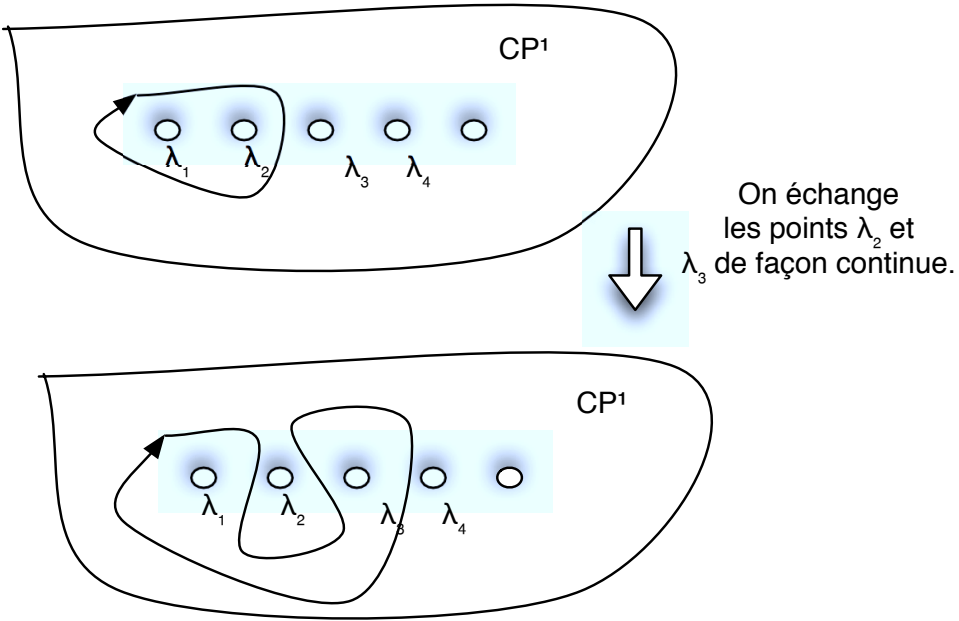
Voici un résultat intéressant qui nous permettra de mieux voir le groupe d'homologie sur $\widehat{\mathbb{C}P^1}$. Il existe $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ dans $\widehat{\mathbb{C}P^1}$ basés en Q tel que

- (1) $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ génèrent $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}P^1}, Q)$
- (2) La seule relation entre les γ_i est $\gamma_1 \cdots \gamma_r = Id$
- (3) Chacun des γ_i est homotope à une petite boucle autour d'un Q_i .

Étant donné F , une courbe hyperelliptique de la forme

$$\mu^2 = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i),$$

FIGURE 12. Exemple d'action de groupe de tresses



soit

$$p : F \rightarrow \widehat{\mathbb{C}P^1}$$

$$(\lambda, \mu) \mapsto \lambda$$

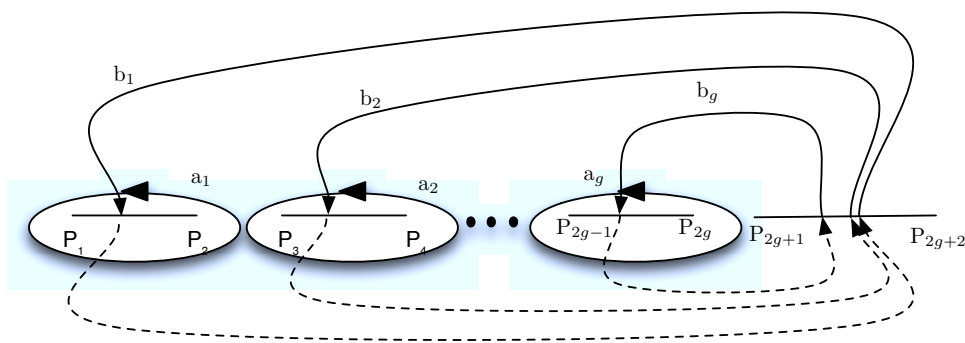
un revêtement ramifié y étant associé. Dans le cas d'une courbe hyperelliptique, l'action du groupe de tresses peut être représentée de la manière suivante. On imagine que l'on permute deux points de ramification fini de manière continue. Il est interdit de bouger le point de ramification à l'infini, lorsque n est impair (il n'y a pas de point de ramification à l'infini lorsque n est pair). Alors, les boucles orientées qui entouraient l'un ou l'autre des points permutés «subissent» le même sort que les points, comme l'indique l'illustration de la figure 12, dans laquelle on a appliqué le générateur σ_2 du groupe de tresses. Aussi, à toute tresse est associée une transformation linéaire dans $H_1(\widehat{\mathbb{C}P^1})$. De la même manière, à chaque tresse, on associe une transformation linéaire dans le groupe d'homologie de la courbe F . Choisissons un ensemble de générateurs dans $H_1(F)$. Une transformation linéaire dans $H_1(F)$ est donc représentée par une matrice de dimensions $2g \times 2g$. Appelons la matrice correspondant à une tresse σ $A_*(\sigma)$.

Le groupe d'homologie $H_1(F)$ de la surface de genre g a $2g$ générateurs libres $\{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$ tel que leurs indices d'intersections sont :

- $a_i \cdot a_j = b_i \cdot b_j = 0$ si $i \neq j$
- $a_i \cdot a_i = b_j \cdot b_j = 0$
- $a_i \cdot b_i = 1$.

Ces générateurs sont appelés les générateurs canoniques.

FIGURE 13. Base Canonique



Les lignes pointillées sont sur l'autre feuillet.

Puisque l'indice d'intersection est une forme bilinéaire antisymétrique à coefficients entiers, et que les automorphismes $A_*(\sigma)$ préservent l'indice d'intersection, alors les matrices $A_*(\gamma)$ dans la base $\{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$ appartiennent au groupe symplectique. C'est pour cette raison que l'on en arrive à la représentation du groupe de tresses au sein du groupe symplectique par l'entremise de l'application

$$A_* : B_n \rightarrow Sp_{2g}(\mathbb{Z})$$

avec $2g + 1 = n$ ou $2g + 2 = n$.

7. Théorème d'Arnold

Maintenant, on peut reformuler le Théorème d'Arnold de la manière suivante : Pour $n = 3$, $n = 4$ où $g = 1$ et $n = 6$ où $g = 2$, et seulement pour ces valeurs de n , on a

$$A_*(B_n) = Sp_{2g}(\mathbb{Z}).$$

La démonstration du fait qu'il n'y ait pas d'autres valeurs de n pour lesquelles

$$A_*(B_n) = Sp_{2g}(\mathbb{Z})$$

est en soi assez simple. Soit la base canonique représentée par le diagramme de la figure 13.

Soit $g \geq 2$. Si n n'est pas égal à 6, alors le cycle a_{g-1} entoure deux points alors que le cycle b_{g-1} entoure 4 points. Le groupe symplectique contient une transformation qui amène le cycle a_{g-1} sur b_{g-1} . Or, les automorphismes $A_*(\sigma)$ conservant le nombre d'éléments entourés par les cycles, il n'existe pas de transformation $A_*(\sigma)$ qui amène a_{g-1} sur b_{g-1} . On peut donc en conclure que, pour n différent de 3, 4 et 6, le groupe symplectique n'est pas égal à $A_*(B_n)$.

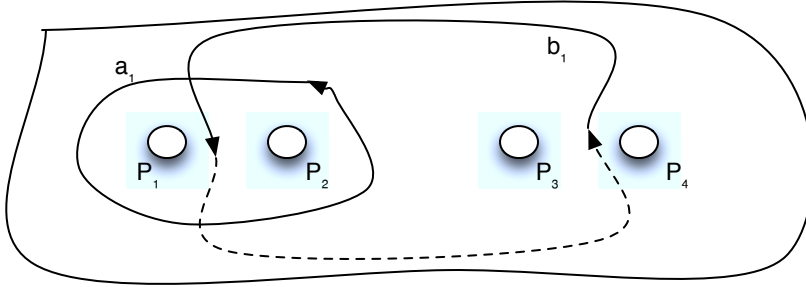
En ce qui a trait à la démonstration de la première partie du théorème, il s'agit d'une simple vérification. Pour $n = 3$ ou $n = 4$, on a que

$$(a, b) \mapsto \begin{bmatrix} a + b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

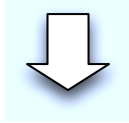
$$(a, b) \mapsto \begin{bmatrix} a & \\ & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

sont des transformations de $A_*(B_3)$ et $A_*(B_4)$, comme le montrent les figures 14 et 15 (voir Section 9). Or, ces deux matrices engendrent le groupe symplectique $Sp_4(\mathbb{Z})$.

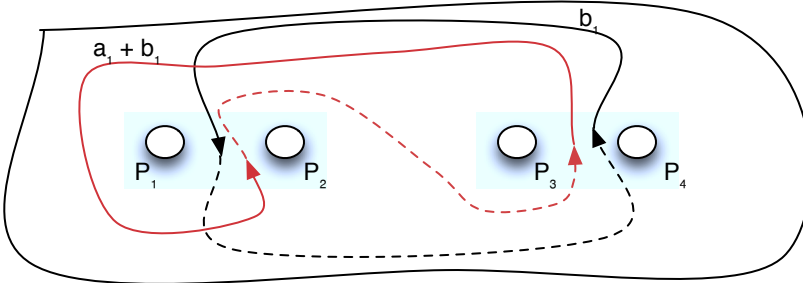
FIGURE 14. Théorème d'Arnold n=3,4



Où $P_i = (\lambda, \mu) = (\lambda_i, 0)$
 $P_i \in F$



En échangeant les points λ_2 et λ_3 , on ne change pas le cycle b_1 , mais le cycle a_1 se transforme en $a_1 + b_1$.



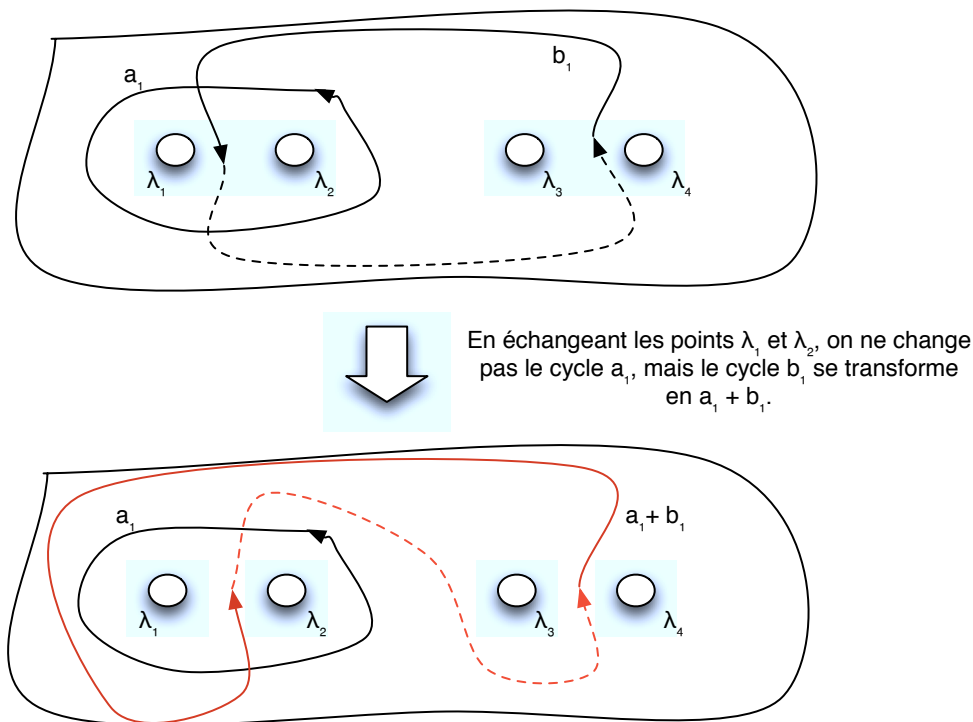
Considérant $n = 6$, il est possible de permuer, de manière continue, tous les points de ramification (puisque aucun de ces points ne se trouve à l'infini). Voici donc les matrices de permutation $P_{i,j}$ qui représentent l'application de la tresse σ_i sur les points de ramification P_i et P_{i+1} :

$$P_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{3,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{4,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{5,6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, si on souhaite appliquer la tresse $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$ qui permute les points de ramification λ_1 et λ_4 , et seulement ces deux points, il suffit de prendre

FIGURE 15. Théorème d'Arnold n=3,4



$$P_{1,4} = P_{1,2}^{-1} P_{2,3}^{-1} P_{3,4} P_{2,3} P_{1,2}.$$

On veut montrer que $A_*(B_6) = Sp_4(\mathbb{Z})$. Il suffit donc de montrer qu'avec les cinq matrices $P_{i,j}$ telles qu'identifiées plus haut, on peut obtenir les matrices $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{S}_1$ et \mathcal{G}_1 de la section 4 qui sont les matrices qui engendrent le groupe symplectique $Sp_4(\mathbb{Z})$. En outre, on a :

$$\mathcal{R}_1 = P_{1,2}^{-1} P_{2,3} P_{1,2} P_{2,3}^{-1} P_{3,4} P_{2,3} P_{3,4}^3 P_{5,6}^{-1} P_{1,2}$$

$$\mathcal{R}_2 = P_{1,2}^{-1} P_{2,3}^{-1} P_{3,4}^{-1} P_{4,5} P_{3,4} P_{2,3} P_{1,2} P_{2,3}^{-1} P_{3,4}^{-1} P_{4,5}^{-1} P_{5,6} P_{4,5} P_{3,4} P_{2,3} P_{3,4}^3 P_{1,2}^{-1} P_{5,6}^{-1}$$

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{R}_1 P_{4,5}^{-1} \mathcal{R}_1$$

et enfin,

$$\mathcal{G}_1 = P_{2,6} = P_{2,3}^{-1} P_{3,4}^{-1} P_{4,5}^{-1} P_{5,6} P_{4,5} P_{3,4} P_{2,3}$$

ce qui achève de montrer que $A_*(B_6) = Sp_4(\mathbb{Z})$.

8. Échange de Points

Dans cette section, nous donnerons une explication sommaire de comment on en arrive à échanger des points et comment cela modifie-t-il les cycles sur la surface.

D'abord, il faut commencer par visualiser la surface $\mathbb{C}P^1$ privée de n points identifiés, soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ensuite, on prend un autre point, P , différent des précédents, et on considère les lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, basés au point P , tel que le lacet γ_i entoure le point λ_i , une base de $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\})$ comme le montre la figure 16 dans le cas où n est égal à 4. La composition des chemins γ_i et γ_j se fait de la manière suivante : si on souhaite calculer $\gamma_i \circ \gamma_j$, on parcourt d'abord γ_j , puis on parcourt γ_i . On note au passage que, comme on se trouve sur $\mathbb{C}P^1$, qui est équivalent à la sphère de Riemann, telle que présentée dans la figure 2 de la section 3, alors la composition $\gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_n$, qui est une boucle centrée en P et entourant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est topologiquement équivalente à l'identité.

Maintenant, on veut pouvoir visualiser l'action du groupe de tresses sur les lacets que l'on vient de définir. Le groupe de tresses agissant sur n lacets, est le groupe de tresses à $n - 1$ générateurs, que l'on notera $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, tel que σ_i permute de manière continue les points i et $i + 1$ dans le sens anti-horaire, comme on peut le voir dans la figure 17, qui représente l'action de σ_1 . On peut voir que l'on permute, de manière continue, les points P_1 et P_2 , dans le sens anti-horaire.

Ainsi, pour $n = 4$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_1(\gamma_1) &= \gamma_2 & \sigma_1(\gamma_2) &= \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \circ \gamma_2 \\ \sigma_2(\gamma_2) &= \gamma_3 & \sigma_2(\gamma_3) &= \gamma_3^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma_3 \\ \sigma_3(\gamma_3) &= \gamma_4 & \sigma_3(\gamma_4) &= \gamma_4^{-1} \circ \gamma_3 \circ \gamma_4. \end{aligned}$$

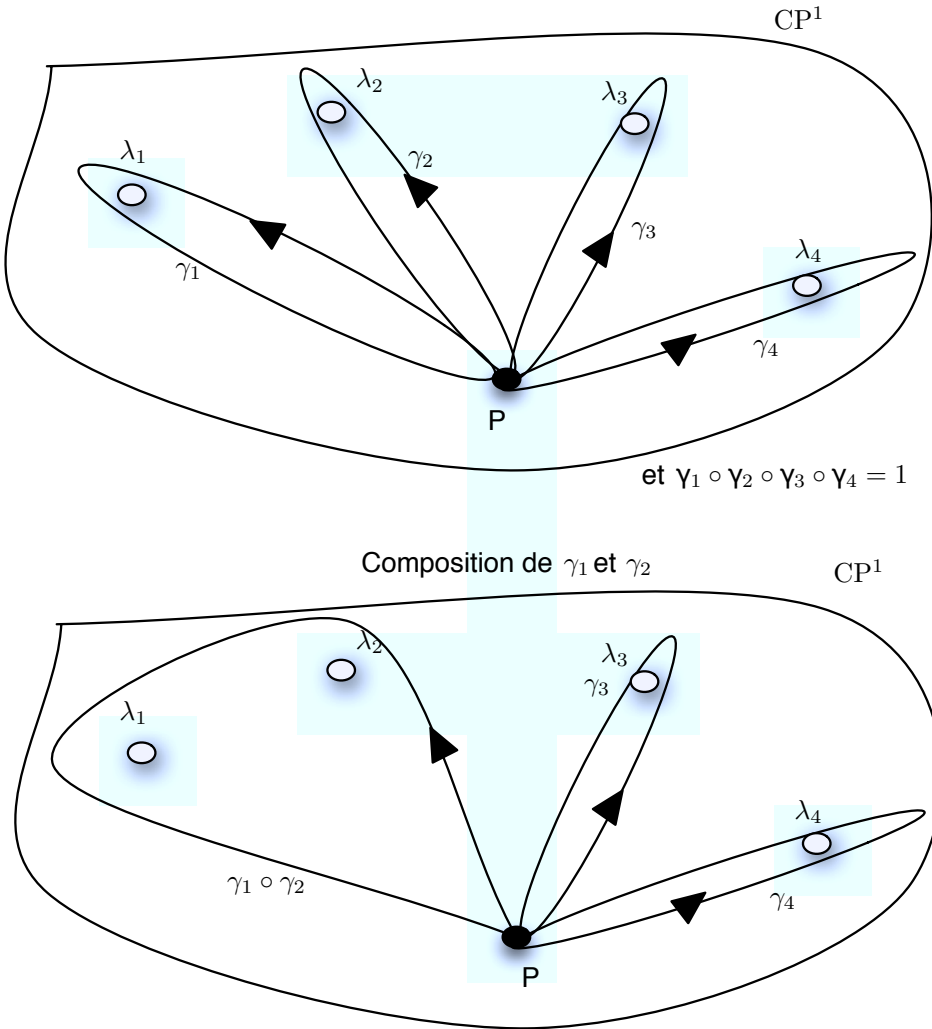
Avant de visualiser l'action du groupe de tresser sur un revêtement ramifié d'une surface hyperelliptique, rappelons-nous ce qu'était la base canonique du groupe d'homologie de cette surface. La base canonique peut être vue comme la figure 13. Maintenant, effectuons une projection des éléments de la base canonique, c'est-à-dire les cycles, sur $\mathbb{C}P^1$. La figure 18 nous montre la projection du cycle a_1 et du cycle b_1 sur $\mathbb{C}P^1$, passant par le point P , et tel que les points $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ représentent la projection des points de ramification. De cette manière, on peut bien voir que la projection du cycle a_1 sur $\mathbb{C}P^1$ est égal à $\gamma_1 \circ \gamma_2$ et que la projection du cycle b_2 sur $\mathbb{C}P^1$ est égal à $\gamma_2 \circ \gamma_3$.

On peut aussi faire le contraire, c'est-à-dire partir d'un cycle sur $\mathbb{C}P^1$ et lui associer un cycle sur la surface hyperelliptique. Cette action s'appelle relèvement. Il y a deux relèvements pour chaque cycle : celui qui relève le point P sur le premier feuillet ainsi que celui qui relève le point P sur le second feuillet. Nous choisissons le relèvement sur le premier feuillet. Pour une surface hyperelliptique à 4 points de ramification, on a :

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{relèvement}(\gamma_1 \circ \gamma_2) \\ b_1 &= \text{relèvement}(\gamma_2 \circ \gamma_3). \end{aligned}$$

Pour visualiser l'action du groupe de tresses sur la base canonique d'homologie d'une surface hyperelliptique ayant pour points de ramification $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, il

FIGURE 16. Lacets



faut visualiser l'action du groupe de tresses sur la surface $\mathbb{C}P^1$ privée de n points $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et ensuite, on relève les cycles résultants sur la surface.

Par exemple, pour $n = 4$ et la base canonique de la figure 13, on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \sigma_1(a_1) &= \sigma_1(\text{relevement}(\gamma_1 \circ \gamma_2)) = \text{relevement}(\sigma_1(\gamma_1) \circ \sigma_1(\gamma_2)) \\ &= \text{relevement}(\gamma_2 \circ \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \circ \gamma_2) = \text{relevement}(\gamma_1 \circ \gamma_2) = a_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_1(b_1) &= \sigma_1(\text{relevement}(\gamma_2 \circ \gamma_3)) = \text{relevement}(\sigma_1(\gamma_2) \circ \sigma_1(\gamma_3)) \\ &= \text{relevement}(\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3) = \text{relevement}(\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1) + \text{relevement}(\gamma_2 \circ \gamma_3) = a_1 + b_1 \end{aligned}$$

tel que nous l'obtenions à la figure 15. De plus,

$$\sigma_2(a_1) = \sigma_2(\text{relevement}(\gamma_1 \circ \gamma_2)) = \text{relevement}(\sigma_2(\gamma_1) \circ \sigma_2(\gamma_2))$$

$$= \text{relevement}(\gamma_1 \circ \gamma_3) = \text{relevement}(\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_2^{-1} \circ \gamma_3) = a_1 + b_1$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_2(b_1) &= \sigma_2(\text{relevement}(\gamma_2 \circ \gamma_3)) = \text{relevement}(\sigma_2(\gamma_2) \circ \sigma_2(\gamma_3)) \\ &= \text{relevement}(\gamma_3 \circ \gamma_3^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma_3) = \text{relevement}(\gamma_2 \circ \gamma_3) = b_1 \end{aligned}$$

tel que nous l'obtenions à la figure 14.

Références

- [1] V. I. Arnol'd, Remark on the branching of hyperelliptic integrals as functions of the parameters, Moscow State University. Translated from *Funktional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya*, Vol. 2, No. 3, pp. 1-3, July-September, 1968.

FELIX CAMIRAND, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: Felix.Camirand.Lemyre@usherbrooke.ca

FIGURE 17. Action de σ_1

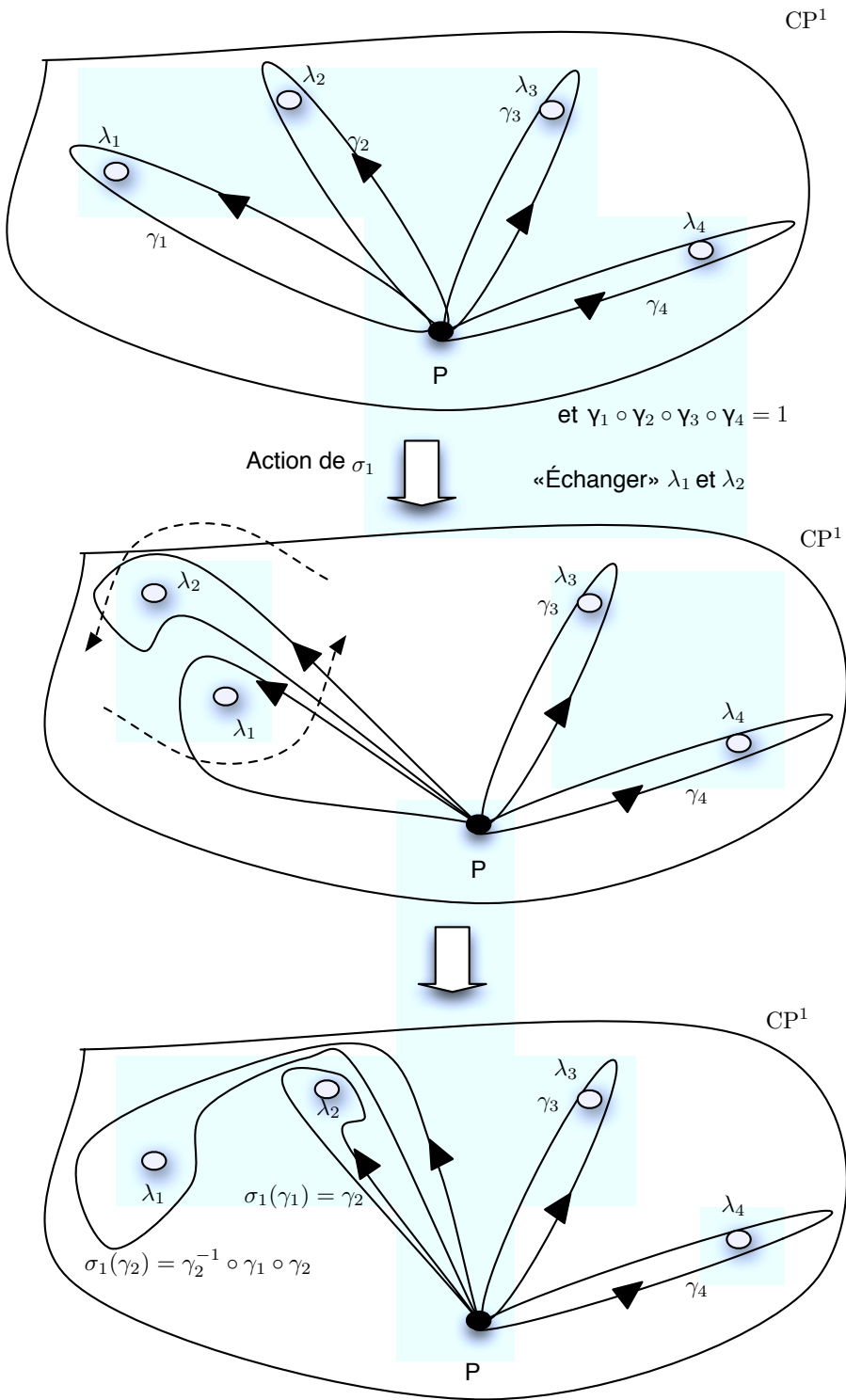


FIGURE 18. Projection sur $\mathbb{C}P^1$ 