

PAVAGES ADDITIFS

JEAN-FRANÇOIS MARCEAU

RÉSUMÉ Le présent article en est un d'introduction aux pavages additifs, faisant également des liens avec les pavages multiplicatifs. Nous ajoutons également deux nouveaux théorèmes pour les pavages additifs (voir théorème 3.7 et théorème 3.11) et une conjecture sur les pavages multiplicatifs infinis. Nous souhaitons avec cet article ramener les recherches sur les pavages au goût du jour et montrer de nouvelles pistes pour tenter de découvrir une application aux pavages additifs.

1 Introduction

Au cours des dernières années, les avancées en matière d'algèbres amassées ont permis de révéler plusieurs liens avec divers domaines des mathématiques. Par exemple, un lien évident entre les frises de nombres générées à partir d'un carquois de type A_n et les pavages (multiplicatifs) de nombres développés par Conway et Coxeter [CC73a, CC73b] au cours des années 70. Bien que les pavages (multiplicatifs) de Conway et Coxeter soient bien connus, il existe certaines variantes de ceux-ci qui sont moins connues, par exemple les pavages additifs développés par G.C. Shephard [She73] ou les 2-frises étudiées par Morier-Genoud, Ovsienko et Tabachnikov [SMGT11, MG11]. Ce qui suit est une introduction aux pavages additifs de Shephard comportant deux nouveaux théorèmes (2 et 5) et une conjecture.

2 Pavages multiplicatifs

Un *pavage multiplicatif* est un assemblage de nombres arrangés en lignes décalées comme les briques d'un mur de telle sorte que la ligne du haut et la ligne du bas sont composées uniquement de 1 et que chaque losange

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{array}$$

satisfait à l'équation suivante :

$$bc - ad = 1.$$

Cette recherche a été rendue possible grâce à une bourse de recherche de premier cycle du CRSNG et grâce à David Smith de l'Université Bishop's qui m'a guidé tout au long de mes recherches.

Cette équation est appelée *règle unimodulaire*. Voici un exemple de pavage multiplicatif :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
 & \dots & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 5 & & 1 & & \dots & & \dots \\
 \dots & 4 & & 1 & & 3 & & 3 & & 3 & & 1 & & 4 & & 4 & & 1 & & \dots & \dots \\
 & \dots & 3 & & 1 & & 4 & & 4 & & 1 & & 3 & & 3 & & 3 & & \dots & & \dots \\
 \dots & 2 & & 2 & & 1 & & 5 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \dots \\
 & \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots
 \end{array}$$

Définition 2.1. Étant donné un pavage à n lignes, une *tranche* est un ensemble de n éléments adjacents, où chaque élément provient d’une ligne différente (en gras dans l’exemple suivant). Un *couple* est une paire d’éléments adjacents sur une tranche. Une *diagonale* est une tranche à travers laquelle il est possible de tracer une ligne droite (en italique dans l’exemple suivant).

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & 1 & & 1 & & 1 & & \mathbf{1} & & 1 & & \mathit{1} & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
 & \dots & 1 & & 2 & & 2 & & \mathbf{2} & & 2 & & \mathit{1} & & 5 & & 1 & & \dots & & \dots \\
 \dots & 4 & & 1 & & 3 & & 3 & & \mathbf{3} & & 1 & & \mathit{4} & & 4 & & 1 & & \dots & \dots \\
 & \dots & 3 & & 1 & & 4 & & 4 & & 1 & & 3 & & \mathit{3} & & 3 & & \dots & & \dots \\
 \dots & 2 & & 2 & & 1 & & \mathbf{5} & & 1 & & 2 & & 2 & & \mathit{2} & & 2 & & 2 & \dots \\
 & \dots & 1 & & 1 & & 1 & & \mathbf{1} & & 1 & & 1 & & 1 & & \mathit{1} & & 1 & & \dots
 \end{array}$$

Dans ce document, nous utiliserons les notations suivantes afin de spécifier la position d’un nombre appartenant à un pavage :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \dots & \text{ligne 1} \\
 & \dots & m_{1,3} & & & m_{2,4} & & & & m_{3,5} & & & & m_{4,6} & & \dots & & \text{ligne 2} \\
 & & \dots & m_{1,4} & & & m_{2,5} & & & & m_{3,6} & & & & \dots & & & \text{ligne 3} \\
 & & & \dots & m_{1,5} & & & m_{2,6} & & & & & & & \dots & & & \text{ligne 4} \\
 & & & & \dots & m_{1,6} & & & & & & & & & \dots & & & \text{ligne 5} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots
 \end{array}$$

Remarque . Dans un pavage multiplicatif à n lignes, la ligne 1 et la ligne n sont composées uniquement de 1.

2.1 Propriétés

Les huit propriétés des pavages multiplicatifs qui suivent serviront de points de comparaison avec les propriétés des pavages additifs dont nous discuterons dans la section 3. Lors de nos recherches nous avons remarqué que, pour chaque propriété du cas additif, il existe une propriété analogue pour le cas multiplicatif. Il est à noter que toutes les propriétés qui suivent proviennent des travaux de Conway et Coxeter [CC73a, CC73b], à l’exception de la propriété 3 qui a été tirée de l’article de Fraser Martineau et Lavertu [ML10].

satisfait à l'équation suivante :

$$(b + c) - (a + d) = 1. \quad (17)$$

Exemple 3.1.

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \dots & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 2 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & \dots \\ & \dots & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{array}$$

Exemple 3.2.

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \dots & 0 & 3.5 & 1.5 & 1 & 0 & 3.5 & \dots \\ \dots & 0 & 2.5 & 4 & 1.5 & 0 & 2.5 & 4 & \dots \\ & \dots & 1.5 & 2 & 3 & -0.5 & 1.5 & 2 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{array}$$

Dans la suite du document, nous utiliserons les notations suivantes pour situer les éléments dans un pavage additif :

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \text{ligne 0} \\ & \dots & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & \text{ligne 1} \\ & & \dots & a_{12} & a_{23} & a_{34} & \dots & \text{ligne 2} \\ & & & \dots & a_{123} & a_{234} & \dots & \text{ligne 3} \\ & & & & \dots & a_{1234} & \dots & \text{ligne 4} \\ & & & & & \dots & & \vdots \\ & & & & & \dots & & \vdots \end{array}$$

Note : Dans un pavage additif à $n+1$ lignes, la ligne 0 et la ligne n sont composées uniquement de 0. Dans le contexte des pavages additifs, la ligne k sera aussi appelée la k^e ligne.

3.1 Propriétés du pavage additif

Cette section est l'essence du document, nous y présenterons les principaux théorèmes connus à propos des pavages additifs et nous fournirons des preuves à ceux-ci.

Le théorème suivant (tiré de [She73]) est l'analogie de la propriété 6 des pavages multiplicatifs.

Théorème 3.3. *Nous avons*

$$a_{r\dots s} = \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) - t_{s-r},$$

où

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

c'est-à-dire que t_n est le n^e nombre triangulaire.

Démonstration. Nous procéderons par récurrence.

Pour $s - r = 1$:

$$a_{rs} = a_r + a_s - 1 = \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) - t_1.$$

Pour $s - r = 2$:

$$\begin{aligned} a_{rps} &= a_{rp} + a_{ps} - a_p - 1 \\ &= (a_r + a_p - 1) + (a_p + a_s - 1) - a_p - 1 \\ &= a_r + a_p + a_s - 3 \\ &= \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) - t_2. \end{aligned}$$

Pour $s - r \geq 3$: en appliquant l'équation (17) au losange

$$\begin{array}{ccc} & a_{r+1\dots s-1} & \\ a_{r\dots s-1} & & a_{r+1\dots s} \\ & a_{r\dots s} & \end{array}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_{r\dots s} &= a_{r\dots s-1} + a_{r+1\dots s} - a_{r+1\dots s-1} - 1 \\ &= \left(\sum_{i=r}^{s-1} a_i + \sum_{i=r+1}^s a_i - \sum_{i=r+1}^{s-1} a_i \right) - 2t_{s-r-1} + t_{s-r-2} - 1 \\ &= \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) - \frac{2(s-r-1)(s-r)}{2} + \frac{(s-r-2)(s-r-1)}{2} - 1 \\ &= \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) - \frac{(s^2 - 2sr + s + r^2 - r)}{2} \\ &= \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) - \frac{(s-r)(s-r+1)}{2} \\ &= \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) - t_{s-r}. \end{aligned}$$

□

Ce théorème entraîne trois corollaires qui nous permettent de caractériser les pavages additifs et qui se révéleront très importants pour démontrer certains théorèmes. Le premier corollaire est une condition suffisante pour que le pavage soit composé uniquement d'entiers.

Corollaire 3.4. *Le pavage est uniquement composé d'entiers si et seulement si les éléments de la première ligne sont tous des entiers.*

Le second corollaire est une condition suffisante pour que la n^e ligne soit composée uniquement de 0.

Corollaire 3.5. *La n^e ligne est une ligne de 0 si et seulement si la somme de n'importe quelle suite de n nombres consécutifs sur la première ligne est égale à t_{n-1} .*

Le dernier corollaire est une condition suffisante pour que le pavage additif soit composé uniquement de nombres positifs.

Corollaire 3.6. *Si pour tous $r, s \in \mathbb{Z}$ avec $s \leq n$, nous avons*

$$\sum_{i=r}^{r+s} a_i \geq t_s$$

alors le pavage additif est composé uniquement de nombres positifs.

Le théorème précédent nous a montré une relation permettant de calculer un élément quelconque du pavage à partir des éléments sur la première ligne. Maintenant, il serait intéressant de voir s'il existe une relation permettant de calculer les éléments de la première ligne à partir d'éléments quelconques. En fait, si un couple d'éléments est connu, il existe une telle relation. Celle-ci est présentée dans le théorème suivant qui se veut l'analogue de la propriété 7 des pavages multiplicatifs.

Théorème 3.7. *Pour tous r, s , avec $s > r$, nous avons :*

$$(a) \quad a_s = a_{r\dots s} - a_{r\dots s-1} + (s - r),$$

$$(b) \quad a_r = a_{r\dots s} - a_{r+1\dots s} + (s - r).$$

Démonstration.

(a) En vertu du théorème 3.3, nous avons :

$$a_{r\dots s} - a_{r\dots s-1} + (s - r) = \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) - \left(\sum_{i=r}^{s-1} a_i \right) - t_{s-r} + t_{s-r-1} + (s - r) = a_s$$

(b) La preuve est similaire et laissée au lecteur.

□

Le théorème suivant, tiré de [She73], est l'analogue de la propriété 2 des pavages multiplicatifs.

Théorème 3.8. *Tout pavage additif à $n + 1$ lignes admet comme isométrie une translation de n positions vers la droite (ou la gauche).*

Démonstration. En vertu du théorème 3.3, nous savons que :

$$\left(\sum_{i=k}^{k+n-1} a_i \right) - t_{n-1} = 0 = \left(\sum_{i=k+1}^{k+n} a_i \right) - t_{n-1}.$$

En simplifiant, on obtient

$$a_k = a_{k+n}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} a_{r\dots s} &= \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) - t_{s-r} \\ &= \left(\sum_{i=r+n}^{s+n} a_i \right) - t_{s-r} \\ &= a_{r+n\dots s+n}. \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant, également tiré de [She73], est l'analogie de la propriété 3 des pavages multiplicatifs.

Théorème 3.9. *Si un pavage additif à $n + 1$ lignes admet une tranche de 0, alors le pavage est composé uniquement d'entiers positifs.*

Démonstration. En utilisant l'équation $a_s = a_{r\dots s} - a_{r\dots s-1} + (s - r)$ (ou $a_r = a_{r\dots s} - a_{r+1\dots s} + (s - r)$) du théorème 3.7 à tous les couples de zéro qui composent la tranche, nous pouvons calculer n nombres consécutifs sur la première ligne. De cette manière, nous découvrons que la première ligne est en fait une permutation des nombres de 1 à n . Comme toutes les permutations de 1 à n aux conditions des trois corollaires du théorème 3.3, le pavage est composé uniquement d'entiers positifs. □

La propriété 8 des pavages multiplicatifs nous permet de générer un pavage à partir d'un autre. Il se trouve que nous avons découvert une technique similaire pour le faire avec les pavages additifs. En voici un exemple :

Exemple 3.10. Considérons le pavage original suivant :

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

En insérant un 5 dans la première rangée nous obtenons :

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 2 & 2 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 3 & 3 & 6 & 6 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
 & 3 & 6 & 6 & 6 & 3 & 3 & 3 \\
 2 & 5 & 5 & 5 & 5 & 2 & 2 & 5 \\
 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Toutefois, il est évident qu'il est impossible d'obtenir le pavage original de cette façon, puisqu'il contient 5 lignes et qu'il n'y a aucun 4 sur la première ligne.

Voici le théorème :

Théorème 3.11. *Il est possible d'obtenir un pavage à $n+1$ lignes à partir d'un pavage à n lignes en insérant le nombre $n-1$ n'importe où dans la première ligne du pavage. De plus, si le pavage à n lignes est formé d'entiers positifs, alors il en est de même pour le pavage à $n+1$ lignes.*

Démonstration. Pour démontrer la première partie de l'énoncé, il suffit de vérifier que les hypothèses du corollaire 2 sont satisfaites pour le nouvel arrangement à $n+1$ lignes. Supposons un pavage additif à n lignes. Nous savons que :

$$\left(\sum_{i=k}^{k+n-2} a_i \right) = t_{n-2}$$

pour tout k . Alors :

$$\left(\sum_{i=k}^{k+n-2} a_i \right) + n - 1 = t_{n-2} + n - 1 = t_{n-1}.$$

de sorte que les hypothèses du corollaire 2 sont vérifiées pour le nouvel arrangement. On obtient donc un pavage à $n+1$ lignes.

Pour ce qui est de la seconde partie, il suffit de montrer que les hypothèses des corollaires 1 et 3 sont satisfaites pour le nouveau pavage à $n+1$ lignes. Pour montrer que les hypothèses du corollaire 3 sont satisfaites, il suffit de le montrer pour les sous-sommes qui incluent le nombre $n-1$ nouvellement ajouté à la première ligne. En vertu du théorème 3.3, nous savons que :

$$\left(\sum_{i=r}^{r+s} a_i \right) \geq t_s,$$

d'où

$$\left(\sum_{i=r}^{r+s} a_i \right) + (n-1) \geq t_s + (n-1) \geq t_s + (s+1) = t_{s+1}$$

car s est au maximum égal à $n-2$. Les hypothèses du corollaire 3 sont donc vérifiées pour le pavage à $n+1$ lignes. Finalement, puisque $n-1$ est un entier, l'hypothèse du corollaire 1 est vérifiée. \square

Note : Cette méthode fonctionne sur tous les pavages, mais elle ne permet pas de tous les obtenir.

Le théorème qui suit provient de [She73].

Théorème 3.12. *Supposons un parallélogramme ayant pour sommets :*

$$(a_{j\dots k}, a_{j\dots s}, a_{r\dots s}, a_{r\dots k})$$

où $r < j \leq k < s$. Alors :

$$a_{j\dots k} + a_{r\dots s} = a_{j\dots s} + a_{r\dots k} - (j - r)(s - k),$$

où $(j - r)(s - k)$ représente l'aire du parallélogramme si nous définissons l'aire des losanges comme étant égale à 1.

Démonstration.

$$\begin{aligned} & a_{r\dots k} + a_{j\dots s} - (j - r)(s - k) \\ &= \left(\left(\sum_{i=r}^k a_i \right) - t_{k-r} \right) + \left(\left(\sum_{i=j}^s a_i \right) - t_{s-j} \right) - (j - r)(s - k) \\ &= \left(\sum_{i=r}^k a_i \right) + \left(\sum_{i=j}^s a_i \right) - \frac{(k-r)(k-r+1)}{2} - \frac{(s-j)(s-j+1)}{2} \\ &\quad - (j - r)(s - k) \\ &= \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) + \left(\sum_{i=j}^k a_i \right) - \frac{(k^2 - 2kr + k - r + r^2)}{2} - \frac{(s^2 - 2sj + s - j + j^2)}{2} \\ &\quad - \frac{2(js - jk - rs + rk)}{2} \\ &= \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) + \left(\sum_{i=j}^k a_i \right) + \frac{(-k^2 - k + r - r^2 - s^2 - s + j - j^2 + 2jk + 2rs)}{2} \\ &= \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) + \left(\sum_{i=j}^k a_i \right) - \frac{(k^2 - 2jk + k - j + j^2)}{2} - \frac{(s^2 - 2sr + s - r + r^2)}{2} \\ &= \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) + \left(\sum_{i=j}^k a_i \right) - \frac{(k-j)(k-j+1)}{2} - \frac{(s-r)(s-r+1)}{2} \\ &= \left(\sum_{i=r}^s a_i \right) + \left(\sum_{i=j}^k a_i \right) - t_{k-j} - t_{s-r} \\ &= a_{j\dots k} + a_{r\dots s} \end{aligned}$$

□

4 Pavages constants

Un *pavage constant* est un pavage (additif ou multiplicatif) pour lequel sur chaque ligne tous les éléments sont égaux.

Exemple 4.1 (Exemple additif).

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 \dots & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \dots \\
 & & 3 & 3 & 3 & 3 \\
 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Exemple 4.2 (Exemple multiplicatif).

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & x & x & x & x \\
 \dots & y & y & y & y & y & \dots \\
 & & x & x & x & x \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{array}$$

où $x = \sqrt{3}$ et $y = 2$.

Une interprétation géométrique peut être associée à chacun des deux types de pavages.

4.1 Le cas multiplicatif :

Pour le cas multiplicatif, il a été démontré dans [CC73a, CC73b] que la valeur des éléments sur une ligne d'un pavage multiplicatif constant à n lignes représente la longueur des diagonales d'un polygone régulier à $n + 1$ côtés de longueur 1. L'exemple précédent illustre les deux longueurs possibles pour les diagonales d'un hexagone régulier avec des côtés de longueur 1 (voir Figure 8).

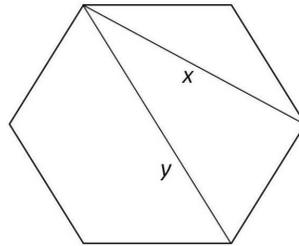


FIGURE 8 – Hexagone régulier avec des côtés de longueur 1.

4.2 Le cas additif :

Il est spécifié dans [She73] que tout pavage additif constant est directement relié à une parabole. Par exemple, le pavage

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 \dots & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \dots \\
 & & 3 & 3 & 3 & 3 \\
 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

et que nous adjoignons cette ligne à une ligne de 1 nous obtenons :

...	1		1		1		1		1		1		1	...		
	...	4		1		3		3		3		1		4	...	
...	15		3		2		8		8		2		3		15	...
	...	11		5		5		21		5		5		11	...	
...	8		18		12		13		13		12		18		8	...
			13		43		31		8		31		43		13	
			⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮	

Ce genre de pavages pourrait faire l'objet de recherches plus approfondies pour de futurs projets.

Références

- [CC73a] J. CONWAY et H. COXETER : Triangulated polygons and frieze patterns. *Mathematical Gazette*, 57(400):87–94, 1973.
- [CC73b] J. CONWAY et H. COXETER. : Triangulated polygons and frieze patterns. *Mathematical Gazette*, 57(400):175–193, 1973.
- [MG11] S. MORIER-GENOUD : Arithmetic of 2-friezes. arXiv :1109.0917v1, 2011.
- [ML10] J.-S. F. MARTINEAU et D. LAVERTU. : Frise et triangulation de polygones. *CaMUS*, pages 39–59, 2010.
- [She73] G. SHEPHARD. : Additive frieze patterns and multiplication table. *Mathematical Gazette*, 60(413):178–184, 1973.
- [SMGT11] V. O. S. MORIER-GENOUD et S. TABACHNIKOV. : 2-frieze patterns and the cluster structure of the space of polygons. arXiv :1008.3359v5, 2011.

JEAN-FRANÇOIS MARCEAU
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, BISHOP'S UNIVERSITY
Courriel: jmarceau10@ubishops.ca