

Application du pentagramme et coefficients amassés

Guillaume Douville

RÉSUMÉ L’application du pentagramme envoie un polygone vers le polygone intérieur construit à partir de l’intersection des diagonales les « plus courtes ». Cette application a des liens avec les coefficients amassés.

1 Introduction

L’application du pentagramme, introduite par R. Schwartz en 1992 [Sch92], a connu un regain d’intérêt ces dernières années, car elle permet d’exhiber des liens avec les algèbres amassées voir [Gli11, MGOT12]. De plus, certains domaines de l’analyse, par exemple les systèmes intégrables, voir [Sol], [ST11] et [OST10], sont aussi en lien avec cette application.

Selon la définition initiale donnée par Schwartz, l’application du pentagramme, notée T , envoie le i^{e} sommet (en prenant une notation des sommets modulo n) d’un n -gone vers le sommet du n -gone formé par l’intersection des diagonales $(i - 1, i + 1)$ et $(i, i + 2)$, formant ainsi un pentagramme (voir la figure 1). Dès ce premier article, les auteurs s’intéressent à une généralisation, les n -gones gauches¹. Les n -gones gauches sont des « polygones » infinis plongés dans $\mathbb{R}P^2$ et n -périodiques modulo projection.

Il sera introduit, suivant les travaux de [OST10], deux systèmes de coordonnées sur l’espace des n -gones gauches modulo équivalence projective : le premier est défini selon le birapport, un invariant simple de géométrie projective, alors que le second est défini par un relèvement vers des vecteurs de \mathbb{R}^3 qui n’a pas d’interprétation géométrique, mais qui s’avère utile aux preuves contenues dans cet article. De plus, il sera introduit, suivant les travaux de M. Glick [Gli11], un système de coordonnées partiel qui suit les mutations de coefficients d’une algèbre amassée particulière telle que définie par [FZ07] sous l’application du pentagramme.

Cet article est organisé comme suit : la première section est consacrée à rappeler des définitions élémentaires de géométrie projective et de coefficients amassés. À la deuxième section, nous définissons formellement les n -gones gauches, les différents systèmes de coordonnées ainsi que l’application du pentagramme, et

J’aimerais remercier les professeurs Vasilisa Shramchenko et Ibrahim Assem pour leur aide à l’écriture de cet article et pour le financement de mon troisième stage de recherche.

¹de l’anglais *twisted n -gons*

nous prouvons le résultat principal de cet article : il existe une formule explicite pour les coordonnées de $T(P)$. Finalement, à la troisième section, nous introduisons les paramètres qui varient selon les règles de mutations de coefficients d'un carquois particulier.

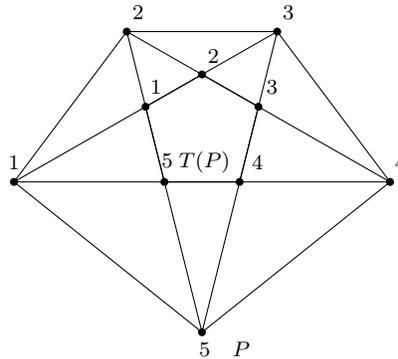


FIGURE 1 – Application du pentagramme T appliquée au pentagone fermé P

2 Rappels

Cette section vise à rappeler des notions de base de géométrie projective, de mutations de carquois et de coefficients amassés associés. Elle permet aussi de fixer les notations utilisées tout au long de cet article.

2.1 Géométrie projective

Cet article étudie les n -gones gauches, qui sont plongés dans $\mathbb{R}P^2$, le plan projectif réel exprimé comme quotient de \mathbb{R}^3 . De plus, l'application du pentagramme sera définie sur le n -gone gauche et son dual. Il est donc nécessaire de rappeler ces concepts.

Définition 2.1. Un *plan projectif* E est un triplet $E = (P, L, I)$ composé de deux ensembles P et L et d'une relation I entre P et L telle que les axiomes suivants sont respectés :

1. Pour tous $p_1, p_2 \in P$ distincts, il existe une seule $l \in L$ telle que $(p_1, l) \in I$ et $(p_2, l) \in I$;
2. Pour toutes $l_1, l_2 \in L$ distinctes, il existe un seul $p \in P$ tel que $(p, l_1) \in I$ et $(p, l_2) \in I$;
3. Il existe p_1, p_2, p_3, p_4 distincts tels que toute $l \in L$ est en relation avec au plus deux p_i .

Les éléments de P sont appelés *points*, ceux de L sont appelés *droites* et I est appelée *relation d'incidence*. Si $(p,l) \in I$, le point p est *incident* à la droite l .

Les axiomes un et deux assurent qu'entre deux points distincts, il passe toujours une unique droite et que deux droites se coupent toujours en un unique point. Ce deuxième axiome est notable puisqu'il implique qu'il n'existe pas de droites parallèles en géométrie projective. Le troisième axiome ne sert qu'à éliminer des cas triviaux et dégénérés.

À un plan projectif $E = (P,L,I)$ est associé son *plan projectif dual* $E^* = (L,P,I^*)$, où $(l,p) \in I^*$ si et seulement si $(p,l) \in I$. Il est parfois plus simple de considérer le dual de E afin de définir des applications ou de prouver certains énoncés.

On s'intéresse maintenant au plan réel projectif. Le plan réel projectif est l'ensemble des droites de \mathbb{R}^3 passant par l'origine, défini formellement ainsi :

Définition 2.2. Le *plan réel projectif*, noté $\mathbb{R}P^2$, est obtenu de \mathbb{R}_*^3 en prenant le quotient de celui-ci par la relation d'équivalence

$$x \sim y \iff (\exists k \in \mathbb{R}_*) \text{ tel que } x = ky,$$

c'est-à-dire que $\mathbb{R}P^2 = (\mathbb{R}_*^3) / \sim$.

Notons $(x:y:z)$ les classes d'équivalence de $\mathbb{R}P^2$, ou encore la droite passant par les points (x,y,z) et $(0,0,0)$ dans \mathbb{R}^3 . Notons aussi (i,j) la droite passant par les points i et j .

Le plan réel projectif est un exemple de plan projectif. Les axiomes présentés à la définition 2.1 sont obtenus en considérant que des droites parallèles de \mathbb{R}^2 se coupent à l'infini.

Dans la définition du n -gone gauche, nous aurons besoin d'une matrice de monodromie M introduisant une périodicité. La matrice M sera un élément de $PGL(3,\mathbb{R})$, qui est un quotient du groupe général linéaire. Rappelons premièrement que le groupe général linéaire $GL(3,\mathbb{R})$ est le groupe des matrices 3×3 inversibles à coefficients dans \mathbb{R} , muni de la multiplication matricielle.

Définition 2.3. Le groupe *projectif linéaire*, noté $PGL(3,\mathbb{R})$, est obtenu de $GL(3,\mathbb{R})$ en prenant le quotient de celui-ci par la relation d'équivalence

$$A \sim B \iff (\exists k \in \mathbb{R}_*) \text{ tel que } A = kB,$$

c'est-à-dire que $PGL(3,\mathbb{R}) = GL(3,\mathbb{R}) / \sim$.

Nous présentons maintenant le birapport de points réels dans \mathbb{R} et de droites réelles dans \mathbb{R}^2 , ce qui mènera à la définition d'un invariant par rapport à $M \in PGL(3,\mathbb{R})$ et par rapport à la multiplication scalaire pour $\mathbb{R}P^2$.

Définition 2.4.

1. Soient p_1, p_2, p_3, p_4 des points sur la droite réelle. Alors, le *birapport* de p_1, p_2, p_3, p_4 , noté $\chi(p_1, p_2, p_3, p_4)$, est donné par

$$\chi(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{(p_1 - p_2)(p_3 - p_4)}{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}.$$

2. Soient v_1, v_2, v_3, v_4 les vecteurs directeurs de quatre droites dans \mathbb{R}^2 . Alors, le *birapport* de v_1, v_2, v_3, v_4 , noté $\chi(v_1, v_2, v_3, v_4)$, est donné par

$$\chi(v_1, v_2, v_3, v_4) = \frac{\det(v_1, v_2) \det(v_3, v_4)}{\det(v_1, v_3) \det(v_2, v_4)}.$$

Ces birapports sont invariants par rapport à l'action de $PGL(3, \mathbb{R})$ et par rapport à la multiplication scalaire. C'est pourquoi, prenant quatre points colinéaires dans $\mathbb{R}P^2$, nous pouvons choisir des représentants colinéaires dans \mathbb{R}^3 , puis projeter la droite support de ces points sur \mathbb{R} pour y calculer le birapport. Cette opération ne dépend pas du représentant choisi dans \mathbb{R}^3 ni de la projection utilisée. De la même façon, ayant quatre droites de vecteurs directeurs v_1, v_2, v_3, v_4 dans $\mathbb{R}P^2$ et choisissant des représentants coplanaires dans \mathbb{R}^3 , le résultat suivant est obtenu en écrivant $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ et $v_4 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$.

Lemme 2.5. *Le birapport $\chi(v_1, v_2, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \frac{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1}$.* \square

Enfinement, voici quelques rappels de propriétés des vecteurs que nous utiliserons plus loin.

Proposition 2.6. *Soit V_1, V_2, V_3 des vecteurs de \mathbb{R}^3 . Alors,*

1. $(V_1 \times V_2) \times (V_2 \times V_3) = \det(V_1, V_2, V_3) V_2$;
2. $(V_1 \times V_2) \cdot V_3 = \det(V_1, V_2, V_3)$. \square

2.2 Carquois, mutation de coefficients

Les algèbres amassées sont souvent étudiées sans coefficients, en s'intéressant uniquement à la combinatoire des variables dites amassées. En général, une algèbre amassée est une algèbre commutative générée par des ensembles (non disjoints) de variables et de coefficients dits amassés. Nous commençons avec un carquois sans boucles ni 2-cycles ayant n sommets, que l'on note Q , et des amas initiaux de variables et de coefficients. On génère, par la suite, de nouveaux carquois, de nouvelles variables et de nouveaux coefficients de façon récursive par un procédé appelé la mutation. Dans cet article, nous ne donnons que les définitions qui sont utiles à l'étude de l'application du pentagramme. En particulier, nous ne nous intéressons qu'à la combinatoire des coefficients, que l'on nomme patron Y ². Pour une couverture plus complète des algèbres amassées, voir les articles [FZ02], [FZ03] et, en particulier pour les mutations de coefficients, [FZ07].

On commence par définir les carquois. Un *carquois* est un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ composé de deux ensembles Q_0 et Q_1 et de deux fonctions $s, b : Q_1 \rightarrow Q_0$. Les éléments de Q_0 sont appelés les *sommets* et ceux de Q_1 , les *flèches*. Pour $\alpha \in Q_1$, $s(\alpha)$ est appelée la *source* de α , et $b(\alpha)$ son *but*. Partant d'un carquois sans boucles ni cycles de longueur 2, notons q_{kj} le nombre de flèches allant de k à j (on convient que $q_{kj} = -q_{jk}$ si les flèches vont plutôt de j vers k).

²de l'anglais *Y-pattern*

Définition 2.7. Soit Q un carquois fini sans boucles ni 2-cycles et $k \in Q_0$. La *mutation* en k transforme Q en un nouveau carquois $\mu_k Q$ ayant les mêmes sommets et :

1. Pour tout chemin $i \leftarrow k \leftarrow j$ ayant k comme centre, ajouter une nouvelle flèche $i \leftarrow j$ dans $\mu_k Q$;
2. Toute flèche ayant k comme source ou but est inversée ;
3. Les 2-cycles créés sont retirés.

Il est clair que si k est une source ou un puits, $\mu_k Q$ est obtenu de Q en inversant simplement toutes les flèches incidentes à k . Observons que la mutation est une involution.

Muni de la mutation de carquois, il reste à définir les coefficients associés aux sommets du carquois et leurs mutations. Tel que mentionné précédemment, nous oublions la dynamique des variables amassées puisque celles-ci ne sont pas utiles aux fins de cet article. Une *graine de coefficients*, ou y -graine, est une paire (y, Q) , où $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ est un n -uplet de quantités appelées *coefficients* et Q est un carquois sans boucles ni 2-cycles ayant n sommets.

Soit (y, Q) une graine de coefficients, on définit la mutation $\mu_k(y, Q)$ de la façon suivante :

$$\mu_k(y, Q) = (y', Q'),$$

où $Q' = \mu_k Q$ tel que décrit à la définition 2.7 et $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$, avec

$$y'_j = \begin{cases} y_j^{-1} & \text{si } j = k \\ y_j y_k^{\max(q_{kj}, 0)} (1 + y_k)^{-q_{kj}} & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

3 Polygones gauches et application du pentagramme

Nous en arrivons à l'application du pentagramme. Cette section suit les travaux de V. Ovsienko, R. Schwartz et S. Tabachnikov dans [OST10]. Premièrement, tel que mentionné en introduction, l'application du pentagramme est définie sur des polygones généralisés, les n -gones gauches.

Définition 3.1. Soit $M \in PGL(3, \mathbb{R})$. Un n -gone gauche est une application $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}P^2$ qui est périodique à projection près, c'est-à-dire que $\phi(k + n) = M\phi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. La matrice M est dite *matrice de monodromie*.

Notons les images de la fonction, appelés *sommets du polygone gauche*, par ϕ v_i , c'est-à-dire que $v_i = \phi(i)$. Le polygone gauche est donc représenté par $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Nous pouvons le visualiser dans $\mathbb{R}P^2$ en reliant v_i à v_{i+1} pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Pour définir correctement l'application du pentagramme, il faut ajouter la condition que pour tout triplet de points consécutifs, ces points ne sont pas

colinéaires. Remarquons que l'on retrouve un polygone fermé, tel que défini en introduction, lorsque $M = I_3$. Deux n -gones gauches ϕ_1 et ϕ_2 sont équivalents s'il existe une projection $\Psi \in PGL(3, \mathbb{R})$ telle que $\Psi\phi_1 = \phi_2$. Dans ce cas, on a que $\phi_2(k+n) = \Psi\phi_1(k+n) = \Psi M_1 \phi_1(k) = \Psi M_1 \Psi^{-1} \phi_2(k)$, donc la matrice de monodromie de ϕ_2 est $\Psi M_1 \Psi^{-1}$. Notons \mathcal{P}_n l'espace des n -gones gauches modulo équivalence projective.

À une courbe différentiable $\gamma(t)$ dans $\mathbb{R}P^2$, il est possible d'associer la courbe duale composée de la famille de ses droites tangentes. Dans le cas discret, nous souhaitons définir de façon similaire les fonctions α et β , que ce soit de $\mathbb{R}P^2$ vers $(\mathbb{R}P^2)^*$ ou inversement.

Définition 3.2. Soit $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un pentagramme gauche dans $\mathbb{R}P^2$. Définissons les deux pentagrammes duaux $(\alpha(v_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ et $(\beta(v_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ de $(\mathbb{R}P^2)^*$ comme suit :

1. $\alpha : (v_i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow (\mathbb{R}P^2)^* : v_i \mapsto (v_i, v_{i+1})$;
2. $\beta : (v_i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow (\mathbb{R}P^2)^* : v_i \mapsto (v_{i-1}, v_{i+1})$.

On réfère le lecteur à la figure 2 pour une illustration de ces applications.

Remarque 3.3. En vertu de la définition du plan dual donné à la section 2.1, les images de α et β sont des points dans $(\mathbb{R}P^2)^*$ qui forment un pentagramme. Nous pouvons donc appliquer de nouveau α et β dans cet espace. Plus formellement, soit $(l_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un pentagramme gauche dans $(\mathbb{R}P^2)^*$. Nous définissons naturellement les applications suivantes :

1. $\alpha^* : (l_i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}P^2 : v_i \mapsto (l_i, l_{i+1})$;
2. $\beta^* : (l_i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}P^2 : v_i \mapsto (l_{i-1}, l_{i+1})$,

et associons l'application α (respectivement β) à α^* (respectivement β^*) de sorte que l'on puisse composer celles-ci dans $\mathbb{R}P^2$. Par exemple, $\alpha^2 = \alpha^* \circ \alpha$.

Remarquons que les applications α et β commutent avec l'action des matrices de $PGL(3, \mathbb{R})$. Ces fonctions sont donc correctement définies sur l'espace \mathcal{P}_n . Il est maintenant possible de définir formellement l'application du pentagramme.

Définition 3.4. Soit $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un pentagramme gauche, l'*application du pentagramme*, notée T , est la composition des applications β et α , c'est-à-dire que $T = \alpha \circ \beta$.

L'un des objectifs de cet article est de trouver les coordonnées de $T(v_i)$ pour chaque sommet v_i . Pour ce faire, il faut connaître plus précisément l'action des fonctions α et β .

Lemme 3.5. Soit $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un pentagramme gauche. Nous obtenons :

$$\alpha^2(v_i) = v_{i+1} \quad \beta^2(v_i) = v_i \quad T(v_i) = \alpha \circ \beta(v_i) = (v_{i-1}, v_{i+1}) \cap (v_i, v_{i+2}).$$

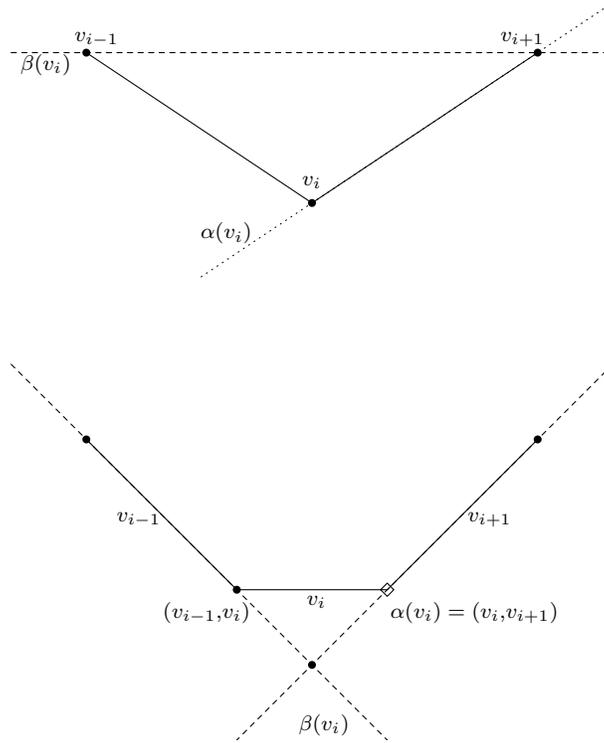


FIGURE 2 – Applications α et β , en haut dans $\mathbb{R}P^2$, en bas dans $(\mathbb{R}P^2)^*$

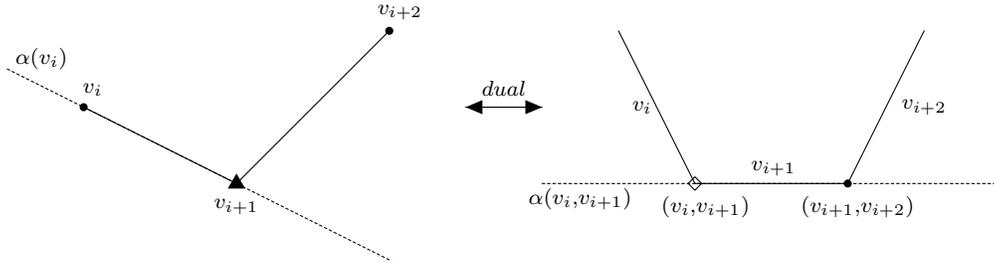
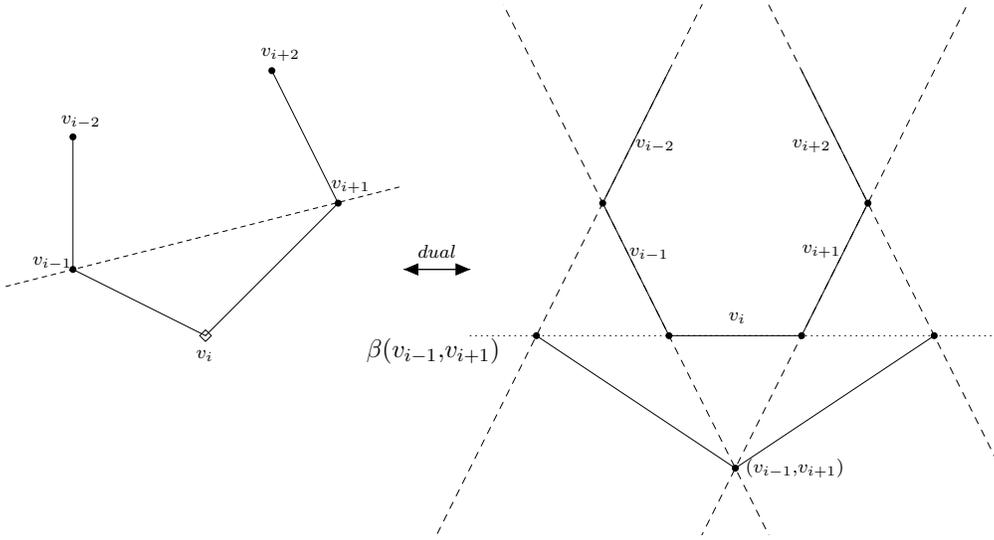
Démonstration. L'énoncé suit directement, il suffit de calculer correctement les compositions dans $\mathbb{R}P^2$ et $(\mathbb{R}P^2)^*$, ce qui est fait visuellement aux figures 3 à 5. Par exemple,

$$\begin{aligned}
 \alpha^2(v_i) &= (\alpha^* \circ \alpha)(v_i) \\
 &= \alpha^*((v_i, v_{i+1})) \\
 &= (v_i, v_{i+1}) \cap (v_{i+1}, v_{i+2}) \\
 &= v_{i+1}.
 \end{aligned}$$

Les autres compositions sont similaires. □

On définit maintenant des coordonnées pour les polygones gauches. Les coordonnées doivent être correctement définies dans $\mathbb{R}P^2$ (elles doivent rester inchangées par des projections), c'est pourquoi elles impliquent le birapport présenté à la définition 2.4. Ces coordonnées requièrent un peu plus que trois points consécutifs non colinéaires pour obtenir un birapport valide, en conséquence ce système de coordonnées n'est pas défini entièrement sur \mathcal{P}_n . Il est cependant généralement défini, ce qui est suffisant pour les besoins de cet article.

Définition 3.6. À tout sommet v_i est associé le couple (x_i, y_i) défini de la façon suivante (voir la figure 6) :

FIGURE 3 – Composition $\alpha^2(v_i) = \alpha(v_i, v_{i+1}) = v_{i+1}$ FIGURE 4 – Composition $\beta^2(v_i) = \beta(v_{i-1}, v_{i+1}) = v_i$

1. $x_i = \chi(v_{i-2}, v_{i-1}, (v_{i-2}, v_{i-1}) \cap (v_i, v_{i+1}), (v_{i-2}, v_{i-1}) \cap (v_{i+1}, v_{i+2}))$;
2. $y_i = \chi((v_{i-2}, v_{i-1}) \cap (v_{i+1}, v_{i+2}), (v_{i-1}, v_i) \cap (v_{i+1}, v_{i+2}), v_{i+1}, v_{i+2})$.

Ces coordonnées ne définissent pas un unique n -gone gauche dans \mathbb{R}^3 . Il est cependant possible de passer de \mathbb{R}^3 à $\mathbb{R}P^2$ et vice-versa, en obtenant des polygones équivalent à projection près. Pour les détails sur la façon de passer d'un espace à l'autre, voir [Sch08].

On cherche à exprimer $T(v_i)$ en termes de coordonnées x_i et y_i . Pour ce faire, il est nécessaire de définir de nouvelles coordonnées qui rendent les calculs possibles, les coordonnées (a, b) . À partir de cet instant, posons que n n'est pas multiple de 3, pour des raisons techniques qui seront mentionnées plus tard.

Définition 3.7. Considérons les suites n -périodiques $((a_i, b_i))_{i \in \mathbb{Z}}$, où $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ et $a_{i+n} = a_i$, $b_{i+n} = b_i$. On leur associe une suite de vecteurs $(V_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, où $V_i \in \mathbb{R}^3$, de la façon suivante :

$$V_{i+3} = a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z},$$

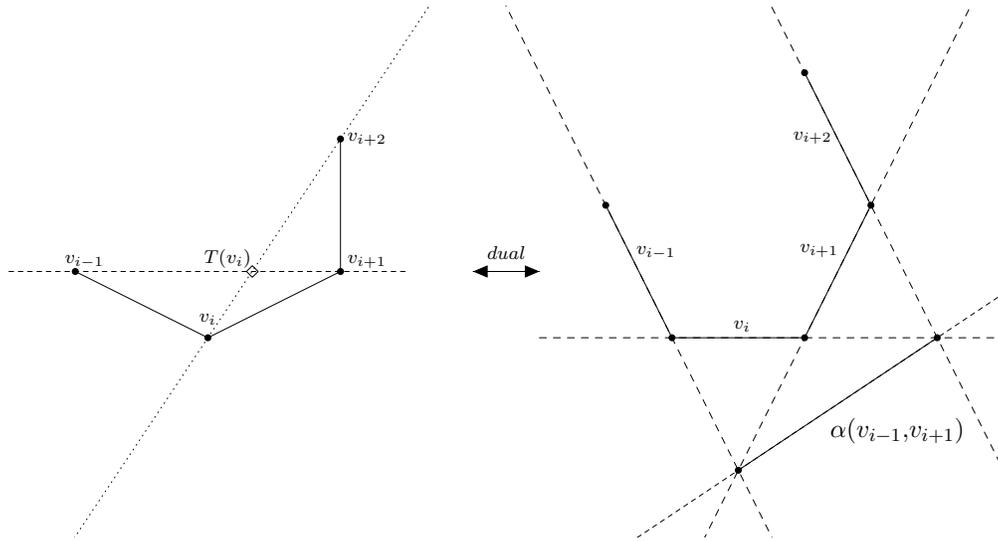


FIGURE 5 – Composition $\alpha \circ \beta(v_i) = \alpha(v_{i-1}, v_{i+1}) = T(v_i)$

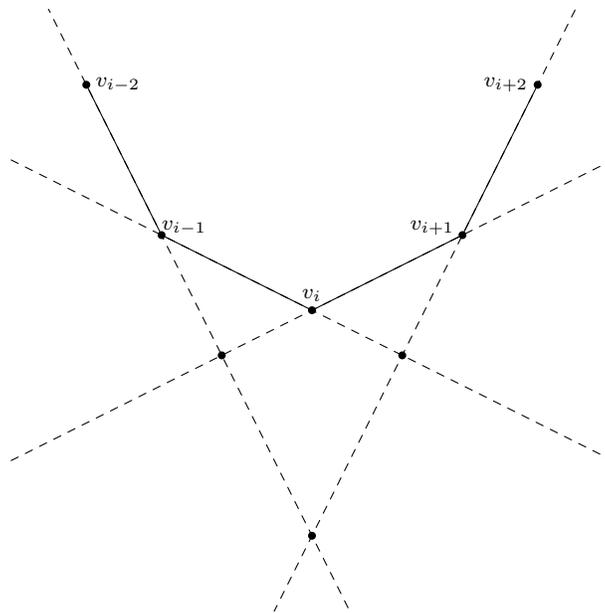


FIGURE 6 – Points utilisés pour la définition des coordonnées (x, y)

avec $V_0 = (1, 0, 0)^t$, $V_1 = (0, 1, 0)^t$ et $V_2 = (0, 0, 1)^t$.

Remarque 3.8. La n -périodicité implique qu’il existe une matrice $\tilde{M} \in SL(3, \mathbb{R})$, que l’on appelle aussi par simplicité la matrice de monodromie, telle que $V_{i+n} = \tilde{M}V_i$. En effet, on vérifie par récurrence que la matrice $\tilde{M} = [V_n, V_{n+1}, V_{n+2}]$ satisfait cette condition. Comme $SL(3, \mathbb{R}) \cong PGL(3, \mathbb{R})$, il existe une unique $M \in PGL(3, \mathbb{R})$ correspondant à \tilde{M} .

Ayant la suite de $(V_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que définie ci-haut, il est évident, en vertu de la remarque précédente, que la projection vers $\mathbb{R}P^2$ $V_i \mapsto v_i = [V_i]$ définit un n -gone gauche avec la matrice de monodromie M . Les v_i sont en position générale, car $\det(V_i, V_{i+1}, V_{i+2}) = 1$.

Proposition 3.9. *Si n n'est pas multiple de 3, alors P_n est en bijection avec l'espace des suites n -périodiques (a_i, b_i) .*

Démonstration. Soit $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un polygone gauche. Alors, les $v_i \in \mathbb{R}P^2$ sont en position générale et respectent $v_{i+n} = Mv_i$, avec $M \in PGL(3, \mathbb{R})$. Comme $PGL(3, \mathbb{R}) \cong SL(3, \mathbb{R})$, il existe un unique $\tilde{M} \in SL(3, \mathbb{R})$ correspondant à M . Considérons un relèvement $v_i \mapsto \tilde{V}_i \in \mathbb{R}^3$ tel que $\tilde{V}_{i+n} = \tilde{M}\tilde{V}_i$. Le fait que les v_i soient en position générale implique que les vecteurs $\tilde{V}_i, \tilde{V}_{i+1}$ et \tilde{V}_{i+2} sont linéairement indépendants. Ainsi, on a que

$$\tilde{V}_{i+3} = a_i \tilde{V}_{i+2} + b_i \tilde{V}_{i+1} + c_i \tilde{V}_i,$$

où $(a_i), (b_i)$ et (c_i) sont des suites n -périodiques indexées par \mathbb{Z} . Appliquons une homothétie $V_i = t_i \tilde{V}_i$ telle que $c_i \equiv 1$. On obtient le système d'équations suivant (les indices sont pris modulo n) :

$$t_i t_{i+1} t_{i+2} = \frac{1}{\det(\tilde{V}_i, \tilde{V}_{i+1}, \tilde{V}_{i+2})}.$$

Ce système a une solution unique, car n n'est pas un multiple de 3. \square

On appelle maintenant le relèvement de (v_i) vers la suite $(V_i) \in \mathbb{R}^3$ respectant $V_{i+3} = a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i$ et $V_{i+n} = M V_i$ le relèvement *canonique*. Nous avons ainsi associé un n -gone gauche à des suites de nombres (a_i, b_i) . Calculons maintenant le lien entre les deux systèmes de coordonnées.

Lemme 3.10. *Si un n -gone gauche est donné par les suites n -périodiques $((x_i, y_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ et $((a_i, b_i))_{i \in \mathbb{Z}}$, les coordonnées sont en relation :*

$$x_i = \frac{a_{i-2}}{b_{i-2} b_{i-1}} \text{ et } y_i = \frac{b_{i-1}}{a_{i-2} a_{i-1}}.$$

Démonstration. En vertu de la définition, on a que

$$x_{i+1} = \chi(v_{i-1}, v_i, (v_{i-1}, v_i) \cap (v_{i+1}, v_{i+2}), (v_{i-1}, v_i) \cap (v_{i+2}, v_{i+3})).$$

Pour obtenir le résultat, il suffit de calculer le relèvement canonique des points $v_{i-1}, v_i, (v_{i-1}, v_i) \cap (v_{i+1}, v_{i+2})$ et $(v_{i-1}, v_i) \cap (v_{i+2}, v_{i+3})$. Rappelons que, pour a, b, c, d éléments de $\mathbb{R}P^2$, le relèvement de $(a, b) \cap (c, d)$ est $(A \times B) \times (C \times D)$. Tel que discuté à la section 2, appliquer le birapport avant ou après le relèvement donne le même résultat. Alors, en utilisant les relations de récurrence $V_{i+3} =$

$a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i$ et $V_{i-1} = V_{i+2} - a_{i-1} V_{i+1} - b_{i-1} V_i$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& (V_{i-1} \times V_i) \times (V_{i+1} \times V_{i+2}) \\
&= (V_{i+2} - a_{i-1} V_{i+1} - b_{i-1} V_i) \times V_i \times (V_{i+1} \times V_{i+2}) \\
&= (V_{i+2} \times V_i - a_{i-1} V_{i+1} \times V_i - b_{i-1} V_i \times V_i) \times (V_{i+1} \times V_{i+2}) \\
&= (V_{i+2} \times V_i) \times (V_{i+1} \times V_{i+2}) - a_{i-1} (V_{i+1} \times V_i) \times (V_{i+1} \times V_{i+2}) \\
&= (V_i \times V_{i+2}) \times (V_{i+2} \times V_{i+1}) + a_{i-1} (V_i \times V_{i+1}) \times (V_{i+1} \times V_{i+2}) \\
&= \det(V_i, V_{i+2}, V_{i+1}) V_{i+2} + a_{i-1} \det(V_i, V_{i+1}, V_{i+2}) V_{i+1} \\
&= -V_{i+2} + a_{i-1} V_{i+1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& (V_{i-1} \times V_i) \times (V_{i+2} \times V_{i+3}) \\
&= ((V_{i+2} - a_{i-1} V_{i+1} - b_{i-1} V_i) \times V_i) \times (V_{i+2} \times (a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i)) \\
&= (V_{i+2} \times V_i - a_{i-1} V_{i+1} \times V_i) \times (b_i V_{i+2} \times V_{i+1} + V_{i+2} \times V_i) \\
&= b_i ((V_{i+2} \times V_i) \times (V_{i+2} \times V_{i+1})) - a_{i-1} b_i ((V_{i+1} \times V_i) \times (V_{i+2} \times V_{i+1})) - \\
&\quad a_{i-1} ((V_{i+1} \times V_i) \times (V_{i+2} \times V_i)) \\
&= b_i V_{i+2} - a_{i-1} b_i V_{i+1} - a_{i-1} V_i.
\end{aligned}$$

Finalement, on a que

$$\begin{aligned}
x_{i+1} &= \chi(V_{i-1}, V_i, (V_{i-1} \times V_i) \times (V_{i+1} \times V_{i+2}), (V_{i-1} \times V_i) \times (V_{i+2} \times V_{i+3})) \\
&= \chi(V_{i-1}, V_i, -V_{i+2} + a_{i-1} V_{i+1}, b_i V_{i+2} - a_{i-1} b_i V_{i+1} - a_{i-1} V_i).
\end{aligned}$$

On applique le lemme 2.5, en utilisant que

$$-V_{i+2} + a_{i-1} V_{i+1} = -V_{i-1} - b_{i+1} V_i$$

et que

$$b_i V_{i+2} - a_{i-1} b_i V_{i+1} - a_{i-1} V_i = b_i V_{i-1} + (b_i b_{i+1} - a_{i+1}) V_i$$

pour obtenir le résultat. Le résultat pour y_i est obtenu de la même façon. \square

Muni de cette équivalence, il ne reste qu'à calculer l'effet des applications α et β en termes de coordonnées (a, b) , c'est-à-dire prolonger ces fonctions au système de coordonnées (a, b) .

Lemme 3.11. *Soit un n -gone gauche correspondant à la suite n -périodique $((a_i, b_i))_{i \in \mathbb{Z}}$. Pour tout i , les applications donnent :*

1. $\alpha(a_i, b_i) = (-b_{i+1}, -a_i)$;
2. $\beta(a_i, b_i) = \left(-\frac{\lambda_i b_{i-1}}{\lambda_i + 2}, -\frac{\lambda_{i+3} a_{i+1}}{\lambda_{i+1}} \right)$, où les λ_i sont uniquement définis par l'égalité $\lambda_i \lambda_{i+1} \lambda_{i+2} = \frac{-1}{1 + b_{i-1} a_i}$.

Démonstration. Nous utilisons de nouveau le relèvement canonique de $(\alpha(v_i))$ vers \mathbb{R}^3 . Posons $U_i = V_i \times V_{i+1}$. Ce relèvement est le relèvement canonique, puisque

$$\begin{aligned}\det(U_i, U_{i+1}, U_{i+2}) &= (U_i \times U_{i+1}) \cdot U_{i+2} \\ &= ((V_i \times V_{i+1}) \times (V_{i+1} \times V_{i+2})) \cdot (V_{i+2} \times V_{i+3}) \\ &= V_{i+1} \cdot (V_{i+2} \times V_{i+3}) = 1.\end{aligned}$$

Nous obtenons une suite $U_{i+3} = \alpha^*(a_i)U_{i+2} + \alpha(b_i)U_{i+1} + U_i$ et voulons calculer les valeurs de $\alpha(a_i)$ et de $\alpha(b_i)$. Puisque $\det(V_i, V_{i+1}, V_{i+2}) = 1$ et $\det(V_i, V_{i+1}, V_i) = 0$, il vient que

$$U_{i+1} \cdot V_i = U_i \cdot V_i + 2 = 1 \text{ et } U_i \cdot V_i = U_i \cdot V_{i+1} = 0.$$

Nous calculons aussi la valeur de $U_{i+2} \cdot V_i$. En vertu de la définition, on a que

$$V_{i+3} = a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i.$$

Effectuons le produit vectoriel à gauche avec le vecteur V_{i+2} et le produit scalaire à droite par le vecteur V_i pour obtenir

$$U_{i+2} \cdot V_i = -b_i.$$

Nous sommes maintenant prêts à calculer les valeurs de $\alpha(a_i)$ et de $\alpha(b_i)$.

$$\begin{aligned}0 &= U_{i+3} \cdot V_{i+3} \\ &= (\alpha(a_i)U_{i+2} + \alpha(b_i)U_{i+1} + U_i) \cdot (a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i) \\ &= \alpha(a_i)b_i + \alpha(a_i)(-b_i) + \alpha(b_i) + a_i \\ &= \alpha(b_i) + a_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-b_{i+1} &= U_{i+3} \cdot V_{i+1} \\ &= (\alpha(a_i)U_{i+2} + \alpha(b_i)U_{i+1} + U_i) \cdot V_{i+1} \\ &= \alpha(a_i)\end{aligned}$$

Pour les valeurs de β , utilisons le relèvement canonique de $\beta(v_i)$ vers \mathbb{R}^3 . Posons $W_i = \lambda_i V_{i-1} \times V_{i+1}$, où les coefficients sont tels que l'on a $\det(W_i, W_{i+1}, W_{i+2}) = 1$. Nous obtenons une suite $W_{i+3} = \beta(a_i)W_{i+2} + \beta(b_i)W_{i+1} + W_i$ et voulons déterminer les valeurs de $\beta(a_i)$ et de $\beta(b_i)$. Premièrement, on a que

$$\begin{aligned}\beta(a_i)W_{i+2} &= W_{i+3} - \beta(b_i)W_{i+1} - W_i \\ \beta(a_i)\lambda_{i+2}V_{i+1} \times V_{i+3} &= \lambda_{i+3}V_{i+2} \times V_{i+4} - \beta(b_i)\lambda_{i+1}V_i \times V_{i+2} - \lambda_i V_{i-1} \times V_{i+1}.\end{aligned}$$

On effectue le produit scalaire à droite par le vecteur V_{i+2} pour obtenir

$$-\beta(a_i)\lambda_{i+2} = -\lambda_i(V_{i-1} \times V_{i+1}) \cdot V_{i+2}.$$

Or, $V_{i-1} = V_{i+2} - a_{i-1}V_{i+1} - b_{i-1}V_i$, d'où nous obtenons

$$\begin{aligned} -\beta(a_i)\lambda_{i+2} &= -\lambda_i((V_{i-1} = V_{i+2} - a_{i-1}V_{i+1} - b_{i-1}V_i) \times V_{i+1}) \cdot V_{i+2} \\ -\beta(a_i)\lambda_{i+2} &= \lambda_i b_{i-1} \\ \beta(a_i) &= \frac{-\lambda_i b_{i-1}}{\lambda_{i+2}}. \end{aligned}$$

De même, on a que

$$\begin{aligned} \beta(b_i)W_{i+1} &= W_{i+3} - \beta(a_i)W_{i+2} - W_i \\ \beta(b_i)\lambda_{i+1}V_i \times V_{i+2} &= \lambda_{i+3}V_{i+2} \times V_{i+4} - \beta(a_i)\lambda_{i+2}V_{i+1} \times V_{i+3} - \lambda_i V_{i-1} \times V_{i+1}. \end{aligned}$$

On effectue le produit scalaire à droite par le vecteur V_{i+1} pour obtenir

$$-\beta(b_i)\lambda_{i+1} = \lambda_{i+3}(V_{i+2} \times V_{i+4}) \cdot V_{i+1}.$$

Encore une fois, $V_{i+4} = a_{i+1}V_{i+3} + b_{i+1}V_{i+2} + V_{i+1}$, d'où nous obtenons,

$$\begin{aligned} -\beta(b_i)\lambda_{i+1} &= \lambda_{i+3}(V_{i+2} \times (a_{i+1}V_{i+3} + b_{i+1}V_{i+2} + V_{i+1})) \cdot V_{i+1} \\ -\beta(b_i)\lambda_{i+1} &= \lambda_{i+3}a_{i+1}(V_{i+2} \times V_{i+3}) \cdot V_{i+1} \\ \beta(b_i) &= \frac{-\lambda_{i+3}a_{i+1}}{\lambda_{i+1}}. \end{aligned}$$

Finalement, il ne reste qu'à vérifier que $\lambda_i\lambda_{i+1}\lambda_{i+2} = \frac{-1}{1+b_{i-1}a_i}$. On a que

$$\begin{aligned} 1 &= \det(W_i, W_{i+1}, W_{i+2}) \\ &= \det(\lambda_i V_{i-1} \times V_{i+1}, \lambda_{i+1} V_i \times V_{i+2}, \lambda_{i+2} V_{i+1} \times V_{i+3}) \\ &= \lambda_i \lambda_{i+1} \lambda_{i+2} \det(V_{i-1} \times V_{i+1}, V_i \times V_{i+2}, V_{i+1} \times V_{i+3}). \end{aligned}$$

Or, puisque $V_{i-1} = V_{i+2} - a_{i-1}V_{i+1} - b_{i-1}V_i$ et $V_{i+3} = a_i V_{i+2} + b_i V_{i+1} + V_i$, il vient que

$$\begin{aligned} &\det(V_{i+2} \times V_{i+1} - b_{i-1}V_i \times V_{i+1}, V_i \times V_{i+2}, a_i V_{i+1} \times V_{i+2} + V_{i+1} \times V_i) \\ &= ((V_{i+2} \times V_{i+1} - b_{i-1}V_i \times V_{i+1}) \times (V_i \times V_{i+2})) \cdot (a_i V_{i+1} \times V_{i+2} + V_{i+1} \times V_i) \\ &= (V_{i+2} - b_{i-1}V_i) \cdot (a_i V_{i+1} \times V_{i+2} + V_{i+1} \times V_i) \\ &= (V_{i+2} \cdot (V_{i+1} \times V_i) - a_i b_{i-1} V_i \cdot (V_{i+1} \times V_{i+2})) \\ &= -1 - a_i b_{i-1} \end{aligned}$$

et le résultat suit. □

On en arrive finalement, en combinant les lemmes 3.10 et 3.11 au résultat souhaité :

Théorème 3.12. *Soit un n -gone gauche donné par les suites n -périodiques $((x_i, y_i))_{i \in \mathbb{Z}}$, $((a_i, b_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ et soit T , l'application du pentagramme. L'application se calcule sur chaque couple pour donner :*

$$T(x_i, y_i) = \left(x_i \frac{1 - x_{i-1}y_{i-1}}{1 - x_{i+1}y_{i+1}}, y_{i+1} \frac{1 - x_{i+2}y_{i+2}}{1 - x_i y_i} \right).$$

Démonstration. Démontrons le résultat seulement pour la première coordonnée, la seconde s'obtenant de la même façon. Notons pour simplifier $T(x_i)$ ($T(a_i)$ respectivement) la composition de l'application du pentagramme $T(x_i, y_i)$ ($T(a_i, b_i)$ respectivement) avec la projection sur la première coordonnée. Premièrement, des lemmes 3.5 et 3.11 viennent les formules suivantes :

$$T(a_i) = \frac{\lambda_{i+4}a_{i+2}}{\lambda_{i+2}} \quad T(b_i) = \frac{\lambda_i b_{i-1}}{\lambda_{i+2}},$$

où, en vertu du lemme 3.11, on a $\lambda_i \lambda_{i+1} \lambda_{i+2} = \frac{-1}{1 + b_{i-1} a_i}$. De plus, les relations données au lemme 3.10 donnent

$$x_i y_i = \frac{-1}{a_{i-1} b_{i-2}} \quad \frac{a_i}{a_{i-3}} = \frac{x_i y_{i-1}}{x_{i+1} y_{i+1}}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} T(x_i) &= \frac{T(a_{i-2})}{T(b_{i-2})T(b_{i-1})} \\ &= \frac{\lambda_{i+2} a_i}{\lambda_i} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-2} b_{i-3}} \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i-1} b_{i-2}} \\ &= \frac{a_i}{b_{i-3} b_{i-2}} \frac{\lambda_i \lambda_{i+1} \lambda_{i+2}}{\lambda_{i-2} \lambda_{i-1} \lambda_i} \\ &= \frac{a_i}{b_{i-3} b_{i-2}} \frac{1 + b_{i-3} a_{i-2}}{1 + b_{i-1} a_i} \\ &= \frac{a_i}{a_{i-3}} \frac{a_{i-2}}{b_{i-3} b_{i-2}} \frac{1 + b_{i-3} a_{i-2}}{1 + b_{i-1} a_i} \\ &= \frac{x_i y_{i-1}}{x_{i+1} y_{i+1}} \cdot x_{i-1} \left(\frac{1 - \frac{1}{x_{i-1} y_{i-1}}}{1 - \frac{1}{x_{i+1} y_{i+1}}} \right) \\ &= x_i \frac{1 - x_{i-1} y_{i-1}}{1 - x_{i+1} y_{i+1}}. \quad \square \end{aligned}$$

Ayant trouvé les coordonnées (x, y) d'une itération de l'application du pentagramme, nous désirons un procédé permettant de connaître les coordonnées d'itérations successives de cette application.

4 Coefficients amassés

Cette section présente des résultats de Max Glick [Gli11].

Premièrement, considérons deux façons différentes d'indexer les n -gones gauches. On dit que le n -gone gauche est indexé par \mathbb{Z} s'il est tel que défini en 3.1. Par contre, une application $\phi : \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \rightarrow \mathbb{R}P^2$ telle que $\psi(k+n) = M\phi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ est un n -gone indexé par $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. On considère désormais l'application du pentagramme qui envoie les n -gones indexés par \mathbb{Z} vers les n -gones indexés par $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, voir par exemple la figure 7.

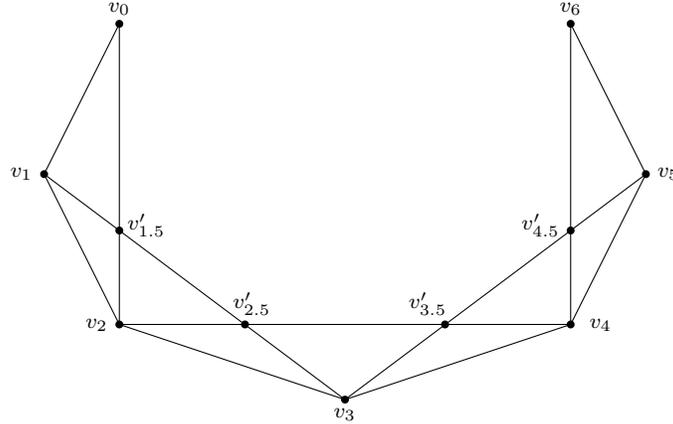


FIGURE 7 – Exemple d'application du pentagramme sur ϕ , où $T(\phi(i)) = v'_{i+\frac{1}{2}}$

Pour obtenir l'application du pentagramme de façon itérative, il est nécessaire d'introduire un système (partiel) de coordonnées, les paramètres z .

Définition 4.1. Soit ϕ un n -gone gauche indexé par \mathbb{Z} . Alors, les *paramètres* z de ϕ sont donnés par

$$z_i = \begin{cases} -(x_i y_i)^{-1} & \text{si } i \text{ est pair} \\ -x_i y_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, si ϕ est indexé par $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, alors les *paramètres* z de ϕ sont donnés par

$$z_i = \begin{cases} -(x_i y_i)^{-1} & \text{si } i \text{ est impair} \\ -x_i y_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 4.2. Les coordonnées z sont des birapports. Soit i une variable d'indice d'un n -gone. Alors, il vient que

$$z_{2i} = -(\chi((v_i, v_{i-2}), (v_i, v_{i-1}), (v_i, v_{i+1}), (v_i, v_{i+2})))^{-1} \text{ et que}$$

$$z_{2i+1} = -\chi((v_{i-2}, v_{i-1}) \cap (v_i, v_{i+1}), v_i, v_{i+1}, (v_{i+2}, v_{i+3}) \cap (v_i, v_{i+1})).$$

On réfère le lecteur à la figure 8 pour une illustration des points et des droites utilisées.

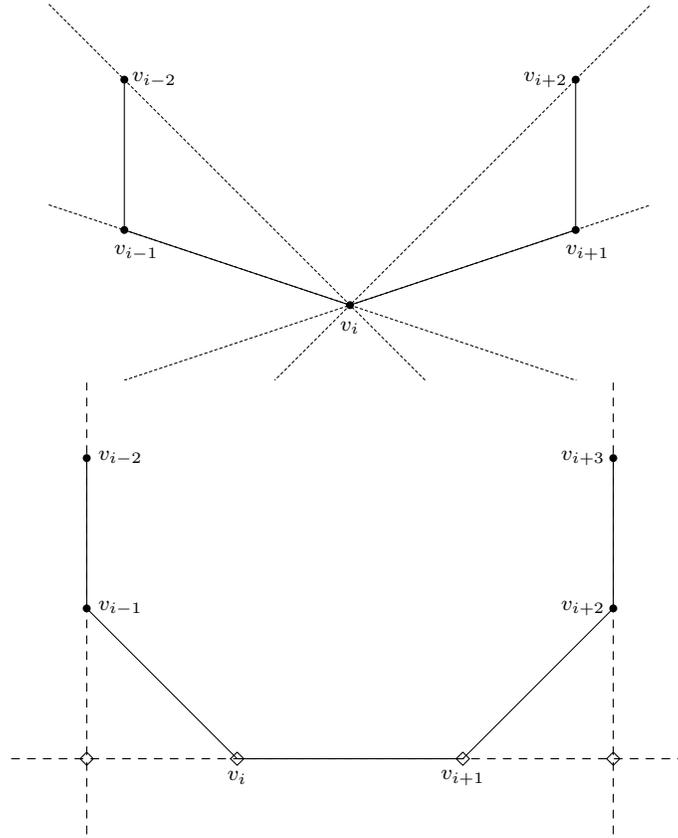


FIGURE 8 – Droites utilisées (en haut) et points utilisés (en bas) pour les birapports des z_i

Le fait que les z_i soient des birapports a été montré dans [OST10]. La vérification de l'équivalence des deux façons de définir les coordonnées z est difficile directement, il est plus aisé de passer par les coordonnées (a,b) vues à la définition 3.7.

Connaissant les paramètres z , il est impossible de retrouver les coordonnées (x,y) (en particulier, le produit $z_1 z_2 \cdots z_{2n}$ égale 1 pour tout n -gone). C'est pourquoi on dit que les paramètres z ne forment qu'un système partiel de coordonnées. Puisque l'on souhaite retrouver les coordonnées (x,y) à partir des paramètres z , il est nécessaire d'introduire des données supplémentaires.

Définition 4.3. [Sch08] Soit ϕ un n -gone gauche. Les polynômes $O_n(\phi) = x_1 x_2 \cdots x_n$ et $E_n(\phi) = y_1 y_2 \cdots y_n$ sont appelés les *invariants du pentagramme*.

Théorème 4.4. [Sch08] Soit ϕ un n -gone gauche. Les invariants du pentagramme sont échangés par l'application du pentagramme :

$$O_n(T(\phi)) = E_n(\phi) \quad E_n(T(\phi)) = O_n(\phi).$$

Les invariants introduits ci-haut ne sont pas les seuls invariants définis initialement par Schwartz. Munis des paramètres z et des invariants du pentagramme,

il est possible de retrouver les coordonnées (x,y) . L'application du pentagramme sur les invariants étant simple, il ne reste qu'à étudier l'évolution des paramètres z . De la formule donnée au théorème 3.12 découle la proposition suivante :

Proposition 4.5. *Soit (z_1, \dots, z_{2n}) les paramètres z du n -gone gauche ϕ . Si ϕ est indexé par $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, alors le i^e z -paramètre de $T(\phi)$ est z'_i , où*

$$z'_i = \begin{cases} z_{i-3}z_i z_{i+3} \frac{(1+z_{j-1})(1+z_{j+1})}{(1+z_{j-3})(1+z_{j+3})} & \text{si } i \text{ est pair} \\ z_i^{-1} & \text{sinon .} \end{cases}$$

Si ϕ est plutôt indexé par les entiers, alors i^e z -paramètre de $T(\phi)$ est z''_i , où

$$z''_i = \begin{cases} z_i^{-1} & \text{si } i \text{ est pair} \\ z_{i-3}z_i z_{i+3} \frac{(1+z_{j-1})(1+z_{j+1})}{(1+z_{j-3})(1+z_{j+3})} & \text{sinon .} \end{cases}$$

□

Il est maintenant possible de calculer les itérations de l'application du pentagramme à l'aide des mutations de coefficients amassés introduits à la sous-section 2.2. Il faut, pour cela, associer un carquois au n -gone gauche.

Définition 4.6. Le carquois associé aux n -gones Q_n est un carquois ayant $2n$ sommets, biparti entre sommets pairs et impairs, tel que pour tout sommet i impair, $\{i \rightarrow (i - 1), i \rightarrow (i + 1), (i - 3) \rightarrow i, (i + 3) \rightarrow i\} \subseteq (Q_n)_1$ (les sommets sont numérotés modulo $2n$). Un exemple de tel carquois est présenté à la figure 9.

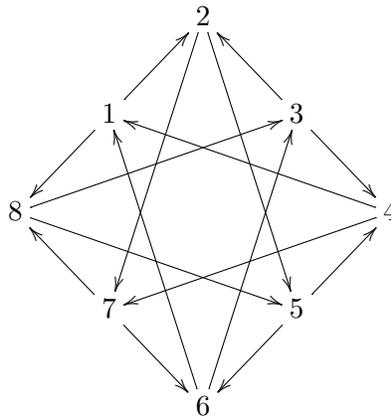


FIGURE 9 – Carquois Q_4

Notons μ_{impair} la composition $\mu_{2n-1} \circ \dots \circ \mu_3 \mu_1$ et μ_{pair} la composition $\mu_{2n} \circ \dots \circ \mu_4 \mu_2$. Suivant les règles de mutation présentées à la définition 2.7, remarquons que $\mu_{impair}(Q_n) = \mu_{pair}(Q_n) = -Q_n$, où $-Q_n$ est le carquois Q_n où les sources et les buts des flèches sont échangés.

On obtient ainsi que les mutations de graines de coefficients μ_{impair} et μ_{pair} correspondent à l'application du pentagramme.

Théorème 4.7. *Munis des notations précédentes, on a que :*

$$\mu_{\text{impair}}((z_1, \dots, z_{2n}), -Q_n) = ((z'_1, \dots, z'_{2n}), Q_n) \text{ et}$$

$$\mu_{\text{pair}}((z_1, \dots, z_{2n}), Q_n) = ((z''_1, \dots, z''_{2n}), -Q_n).$$

□

Références

- [FZ02] S. FOMIN et A. ZELEVINSKY : Cluster algebras I : Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, (15(2)):497–529, 2002.
- [FZ03] S. FOMIN et A. ZELEVINSKY : Cluster algebras II : Finite type classification. *Invent. Math.*, (154):63–121, 2003.
- [FZ07] S. FOMIN et A. ZELEVINSKY : Cluster algebras IV : Coefficients. *Compos. Math.*, (143):112–164, 2007.
- [Gli11] M. GLICK : The pentagram map and Y-patterns. *Adv. Math.*, (227):1019–1045, 2011.
- [MGOT12] S. MORIER-GENOUD, V. OSIENKO et S. TABACHNIKOV : 2-frieze patterns and the cluster structure of the space of polygons. *Ann. Inst. Fourier*, 2012. in print.
- [OST10] V. OVSIENKO, R. SCHWARTZ et S. TABACHNIKOV : The pentagram map : a discrete iintegrable system. *Commun. Math. Phys.*, (299):409–446, 2010.
- [Sch92] R. SCHWARTZ : The pentagram map. *Experiment. Math.*, (1):71–81, 1992.
- [Sch08] R. SCHWARTZ : Discrete monodromy, pentagrams, and the method of condensation. *J. Fixed Point Theory Appl.*, (3):379–409, 2008.
- [Sol] F. SOLOVIEV : Integrability of the Pentagram Map. Preprint arXiv :1106.3950.
- [ST11] R. SCHWARTZ et S. TABACHNIKOV : The Pentagrams integrals on inscribed polygons. *Electron. J. Comb.*, (18):171, 2011.

GUILLAUME DOUVILLE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: Guillaume.Douville@USherbrooke.ca