

Sur le diamètre du graphe d'échange de l'algèbre amassée de type D_n

Yannick Lebrun

RÉSUMÉ Le calcul du diamètre du graphe d'échange de l'algèbre amassée de type D_n constitue un problème intéressant des mathématiques. De un, nous pouvons le transposer en géométrie grâce aux triangulations de surfaces. De deux, la preuve récente de Ceballos et Pilaud que ce diamètre vaut $2n - 2$ lorsque $n \geq 2$ est d'une simplicité remarquable. Dans cet article, nous en présentons une version retravaillée qui utilise un support géométrique mieux connu et qui met l'accent sur la rigueur et les intuitions derrière les idées principales. Tout d'abord, nous définissons les triangulations étiquetées du n -gone à une ponction. Ensuite, nous fournissons les arguments permettant de les lier à D_n . Finalement, nous démontrons le résultat de Ceballos et Pilaud par l'intermédiaire de ces triangulations. Au passage, nous introduisons la notion de niveau qui modélise la structure du graphe d'échange de D_n .

1 Introduction

Les algèbres amassées, depuis leur introduction dans [FZ02], jouissent d'une reconnaissance et de développements importants. Leur notoriété vient du fait que nous les retrouvons dans plusieurs branches des mathématiques et même en physique. Sommairement, ce type d'algèbre est généré par des variables dites amassées qui sont regroupées en ensembles de même cardinalité appelés amas. Pour obtenir ces variables, nous considérons tout d'abord une graine (initiale) qui est une paire formée d'une matrice et d'un amas. Ensuite, nous lui appliquons des mutations dans toutes les directions possibles. Ces opérations créent de nouvelles graines et donc de nouvelles variables amassées qui contribuent à générer l'algèbre. Si nous répétons infiniment ce processus, nous obtenons un ensemble potentiellement infini de graines liées par des mutations. Ces liens sont encodés dans un graphe dit d'échange où les sommets correspondent aux graines et les arêtes, aux mutations.

Cet article est la conclusion d'un stage de recherche mené à l'Université de Sherbrooke lors de l'été 2013. Son financement provient d'une bourse du CRSNG jumelée d'une contribution de Virginie Charette. Je remercie cette personne et Thomas Brüstle, tous deux professeurs au département de mathématiques de l'université, pour avoir supervisé mes recherches et commenté mes premiers écrits dont le présent article s'inspire. Je remercie également mes anciens collègues Jean-François Marceau et Guillaume Douville pour leur aide et les discussions que nous avons partagées. Finalement, je suis reconnaissant envers ma famille qui m'a appuyé aux niveaux matériel et affectif durant la rédaction. Sans elle, cet article n'existerait pas.

Nous savons grâce à [FZ03a] qu'il existe seulement quelques cas où le nombre de sommets est fini. Cela se produit lorsque les graines générées par mutation récursive se répètent toujours après un certain temps. Ces cas sont regroupés dans [FZ03a] en neuf types d'algèbres amassées qui sont qualifiées de type fini : A_n , B_n , C_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 , F_4 et G_2 . Dans le contexte d'une telle algèbre, il devient pertinent de parler du diamètre de son graphe d'échange. Cette mesure d'éloignement correspond ici au nombre minimal de mutations qu'il nous faut pour passer d'une graine quelconque à une autre. Il y a quelques années de cela, son calcul était un problème ouvert pour tous les types finis autres que G_2 .

Le diamètre associé au type A_n , le premier à avoir été « résolu », est borné supérieurement et déjà conjecturé dans [STT88]. Une démonstration de cette conjecture fut éventuellement annoncée, mais seulement en 2012 dans une version antérieure de [Pou14]. Fait intéressant, les algèbres amassées ne sont pas mentionnées dans les deux articles et n'auraient pu l'être en 1988. Le problème étudié dans ces derniers concerne plutôt les triangulations du $(n+3)$ -gone et le flip de leurs diagonales. Or, il est maintenant connu que ces triangulations et les flips qui les relient sont une représentation géométrique des graines de A_n et des mutations qui les relient. En plus de souligner la polyvalence des algèbres amassées, cette représentation nous permet de mieux visualiser la structure du graphe d'échange de A_n . Ainsi, elle facilite le calcul de son diamètre.

Quant à D_n , le type qui nous intéresse, le diamètre de son graphe a été récemment évalué dans [CP14] à $2n-2$ lorsque $n \geq 2$. Les auteurs de ce résultat ont eux aussi travaillé dans un cadre géométrique plutôt qu'algébrique. Entre autres, ils ont introduit les pseudo-triangulations d'une configuration \mathbb{D}_n qui sont équivalentes aux graines de D_n . Leur introduction, toutefois, n'était pas nécessaire, car elles ne sont pas les seules avec cette propriété. Par exemple, nous disposons des triangulations étiquetées définies dans [FST08] qui correspondent aussi à D_n lorsqu'elles sont appliquées au n -gone à une ponction, noté ici \mathbf{P}_n^\bullet . Ces triangulations étant connues depuis quelques années et plus répandues, nous jugeons pertinent de reprendre la démarche présentée dans [CP14] avec \mathbf{P}_n^\bullet . Nous profitons aussi de cette occasion pour la retravailler et ainsi lui donner une progression plus intuitive et rigoureuse qui complimente sa simplicité.

Tout d'abord, à la section 2, nous décrivons les triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet suivies du flip d'arc étiqueté. Ensuite, à la section 3, nous présentons simplement le graphe d'échange de l'algèbre amassée de type D_n et établissons son équivalence avec \mathbf{P}_n^\bullet . Finalement, à la section 4, nous définissons proprement le problème du diamètre et en suggérons une solution inspirée de [CP14]. La première partie de cette solution se penche sur la notion de niveau qui rejoint notre besoin de connaître la structure du graphe d'échange. La seconde partie, quant à elle, se concentre sur la preuve proprement dite.

Nous n'assumons du lecteur aucune familiarité avec les algèbres amassées ou la topologie. Cependant, le contraire est souhaitable afin d'avoir une compréhension plus juste de certains passages. En ce qui concerne les algèbres amassées, la section 2 de [Bou12] suffit. Pour ce qui est de la topologie, nous recommandons la section 2.1 de [Dou12].

2 Triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet

Les triangulations, à savoir les décompositions en triangles, sont un outil essentiel dans la classification des surfaces topologiques. Dans cet article, nous nous intéressons plutôt à la combinatoire issue de leur structure. Plus spécifiquement, la combinatoire qui nous intéresse est celle générée par les triangulations dites étiquetées de [FST08] sur une surface particulière notée \mathbf{P}_n^\bullet .

Aux sections 2.1, 2.2 et 2.3, nous introduisons successivement la surface \mathbf{P}_n^\bullet , les arcs étiquetés qu'elle admet et les règles de compatibilité qui régissent leur combinaison. Une fois cela terminé, nous présentons à la section 2.4 les triangulations étiquetées (de \mathbf{P}_n^\bullet) proprement dites et quelques-unes de leurs caractéristiques. La section 2.5, quant à elle, discute de l'opération du flip qui génère la combinatoire voulue. Par souci de simplicité, plusieurs définitions et résultats de cette section sont restreints au cas \mathbf{P}_n^\bullet . Pour une présentation générale des triangulations étiquetées, le lecteur est référé aux sections 2 et 7 de [FST08].

2.1 La surface \mathbf{P}_n^\bullet

La surface notée \mathbf{P}_n^\bullet , ou alternativement, $(\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$, est le n -gone à une ponction. Celui-ci est un exemple de ce que nous appelons une surface marquée.

Définition 2.1. Une *surface marquée* est une paire (\mathbf{S}, \mathbf{M}) où \mathbf{S} est une surface (soumise à quelques restrictions¹) et \mathbf{M} un ensemble de points distincts dans \mathbf{S} appelés *points marqués*.

Nous n'avons pas à identifier précisément les ensembles \mathbf{S} et \mathbf{M} , car (\mathbf{S}, \mathbf{M}) est définie à homéomorphisme près. Autrement dit, elle est équivalente à toute surface marquée qui lui est homéomorphe. Nous rappelons qu'un *homéomorphisme* est une bijection continue d'inverse continu entre deux espaces topologiques (incluant les surfaces). Cela implique aussi que \mathbf{S} , qui inclut \mathbf{M} , peut être déformée et ce « dans une certaine mesure ».

La surface \mathbf{S}_p associée à \mathbf{P}_n^\bullet est un *disque*. Par exemple, l'ensemble de points

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

correspond à un disque de rayon $r \in]0, \infty[$ dans le plan. En topologie, nous disons que la partie $x^2 + y^2 = r^2$ est la *frontière* $\partial\mathbf{S}_p$ de \mathbf{S}_p tandis que la partie $x^2 + y^2 < r^2$ est l'*intérieur* $\text{int}(\mathbf{S}_p)$ de \mathbf{S}_p . L'ensemble \mathbf{M}_p , quant à lui, contient $n + 1$ points distincts. Parmi ceux-ci, n se situent sur la frontière du disque alors que le dernier point se situe dans son intérieur et porte un nom particulier.

Définition 2.2. Soit (\mathbf{S}, \mathbf{M}) une surface marquée. Un point marqué de \mathbf{M} dans l'intérieur $\text{int}(\mathbf{S})$ de \mathbf{S} s'appelle une *ponction*.

Définition 2.3. Soit $n \geq 1$ un entier. Un *n -gone à une ponction* $\mathbf{P}_n^\bullet = (\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$ est, à homéomorphisme près, un disque avec n points marqués sur sa frontière et une ponction.

¹La définition 2.1 de [FST08] demande que \mathbf{S} soit une surface de Riemann de dimension deux qui est de plus connexe, orientable et à bord.

Notons que le cas $n = 1$ n'est pas considéré par [FST08] comme lieu pour les triangulations ; nous reviendrons là-dessus à la section 2.4. La définition de \mathbf{P}_1^\bullet est toutefois donnée puisque ce dernier est utile pour présenter les arcs étiquetés.

Comme \mathbf{P}_n^\bullet est défini à homéomorphisme près, nous pouvons modifier son apparence discoïde. En fait, il nous est possible de choisir n'importe quelle surface marquée à la condition qu'elle possède les mêmes propriétés topologiques². Ainsi, si $n \geq 3$, nous préférons, pour les figures, utiliser un n -gone régulier (avec ponction) plutôt qu'un disque. À la figure 1, nous illustrons les cas $n = 3$ et $n = 4$ qui sont associés au triangle équilatéral et au carré. Naturellement, cette transformation est impossible lorsque $n < 3$. Dans ce cas, nous devons garder les frontières courbées. Le terme *monogone* désigne dorénavant un 1-gone et le terme *digone*, un 2-gone. Ces deux derniers sont aussi illustrés à la figure 1.

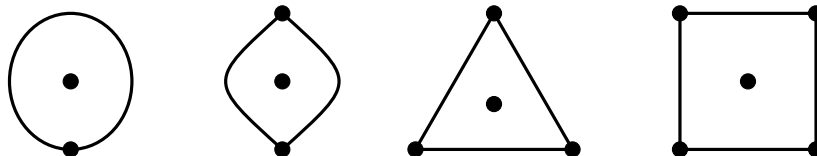


FIGURE 1 – Exemples de n -gones à une ponction \mathbf{P}_n^\bullet lorsque $1 \leq n \leq 4$. L'apparence de la frontière est personnalisable.

2.2 Les arcs

Notre objectif est de diviser \mathbf{P}_n^\bullet en « triangles étiquetés » dont les sommets sont des points marqués. Par conséquent, nous avons besoin d'arcs (étiquetés) qui relient les points de \mathbf{M}_p afin de former ces triangles. Avant de définir les arcs étiquetés, nous devons passer par la notion d'arc simple ou non étiqueté.

Définition 2.4. Un *arc simple* dans $\mathbf{P}_n^\bullet = (\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$ est l'image $y([0, 1])$ d'une fonction continue $y : [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}_p$ où $y([0, 1])$ satisfait les conditions suivantes :

- Elle ne s'auto-intersecte pas : pour tous $a, b \in [0, 1]$ distincts, $y(a) \neq y(b)$;
- Ses extrémités sont des points marqués (distincts) : $y(0), y(1) \in \mathbf{M}_p$;
- À l'exception de ses extrémités, elle est disjointe de la frontière de \mathbf{S}_p et ne touche à aucun point marqué : $y(]0, 1[) \subset \text{int}(\mathbf{S}_p) \setminus \mathbf{M}_p$;
- Elle ne délimite pas de monogone avec ou sans ponction dans \mathbf{P}_n^\bullet ni ne délimite de digone sans ponction dans celui-ci.

Un arc étiqueté est, comme son nom le suggère, un arc avec des étiquettes. Plus précisément, ce sont ses deux *bouts* que nous étiquetons. Les bouts d'un

²Dans notre cas, ces propriétés sont un genre nul, la présence d'une seule ponction et celle d'une seule frontière avec n points marqués. Le genre d'une surface fait l'objet de la définition 2.10 de [Dou12].

arc sont un concept intuitif et non formel. Nous les obtenons en coupant arbitrairement l'arc en trois portions, puis en éliminant celle du milieu. En d'autres mots, ils correspondent à des portions d'arc qui voisinent les extrémités.

Définition 2.5. Un *arc étiqueté* dans $\mathbf{P}_n^\bullet = (\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$ est un arc simple dont chaque bout est étiqueté d'une de deux façons, « plain » ou « notched », suivant la restriction qu'un bout qui voisine la frontière de \mathbf{S}_p est étiqueté « plain ».

Une étiquette qui voisine la ponction, elle, peut être « plain » ou « notched ». Par convention, un bout étiqueté « plain » n'a pas de symbole tandis qu'un bout étiqueté « notched » est identifié par un nœud papillon \bowtie . Afin d'illustrer cela, nous avons dessiné à la figure 2 toutes les possibilités d'étiquetage d'un arc étiqueté. Notons qu'à partir de maintenant, le terme « arc » désigne par défaut « arc étiqueté » afin d'alléger le texte. De plus, lorsque nous parlerons de la *version non étiquetée* d'un arc étiqueté, nous référerons à l'arc (simple) non étiqueté de même forme.



FIGURE 2 – Les quatre possibilités d'étiquetage d'un arc si nous ignorons la restriction de la définition 2.5. Nous ajoutons le nœud papillon \bowtie proche d'un point pour signaler que le bout qui le voisine est étiqueté « notched ». Si ce symbole est absent, alors le bout est étiqueté « plain ».

En ce moment, nous pouvons discerner une infinité d'arcs, car ceux-ci, en vertu de leur définition, admettent des formes variées. Or, beaucoup d'entre eux reviennent au même pour diviser \mathbf{P}_n^\bullet . C'est pourquoi nous allons plutôt regrouper les arcs en classes d'équivalence spécifiques appelées *classes d'isotopie*.

Définition 2.6. Deux arcs étiquetés $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}_p$ et $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}_p$ dans $\mathbf{P}_n^\bullet = (\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$ sont *équivalents* ou *appartiennent à la même classe d'isotopie* si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- Il existe une fonction continue $i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}_p$ où $i(0, t) = \gamma(t)$, $i(1, t) = \rho(t)$ et pour tout $s \in]0, 1[$, $i(s, t) = \alpha(t)$ est un arc dans \mathbf{P}_n^\bullet . En particulier, γ et ρ relient les mêmes points marqués ;
- Leurs étiquettes aux points marqués sont identiques.

Si nous enlevons la seconde condition, nous obtenons la définition de classe d'isotopie pour les arcs simples ou non étiquetés.

Le paramètre s joue ici le rôle d'un curseur : ses valeurs correspondent aux états transitoires d'une déformation liant γ et ρ . Concrètement, nous pouvons imaginer les arcs comme étant des élastiques sur un plan. Les points marqués,

eux, s'associent à des punaises qui maintiennent les extrémités des élastiques en place et qui agissent comme obstacles. Selon cette interprétation, deux élastiques sont équivalents si et seulement si nous pouvons déformer l'un en l'autre. Entre autres, il est impossible de les faire passer par-dessus une punaise. Sinon, l'image $i(s,]0, 1[)$, qui inclurait un point marqué pour un $s \in]0, 1[$ donné, ne serait plus disjointe de \mathbf{M}_p .

D'ici la fin de l'article, nous ne considérons plus les arcs en tant que courbes individuelles, mais plutôt en tant que classes d'isotopie. Toutefois, nous maintenons l'utilisation du terme « arc » qui désigne maintenant une classe identifiée par le représentant choisi. Grâce à ce regroupement, nous sommes en mesure d'énumérer tous les types d'arcs pouvant apparaître dans \mathbf{P}_n^\bullet .

Remarque 2.7. Tout arc étiqueté γ dans \mathbf{P}_n^\bullet appartient à l'un et seulement un des trois *types* suivants :

Type I : L'arc γ relie deux points marqués distincts M et N sur la frontière et ses deux étiquettes sont « plain » ;

Type II : L'arc γ relie la ponction O à un point marqué M sur la frontière et ses deux étiquettes sont « plain » ;

Type III : L'arc γ relie la ponction O à un point marqué M sur la frontière, son étiquette voisinant M est « plain » et celle voisinant O est « notched ».

De plus, si γ est un arc de type II ou III, alors il est uniquement déterminé par M . Sinon, si γ est de type I, il est uniquement déterminé par la paire $\{M, N\}$ si et seulement si ces points sont adjacents sur la frontière. Dans le cas contraire, $\{M, N\}$ identifie deux arcs qui passent de chaque côté de la ponction.

Entre autres, cette remarque implique que le nombre d'arcs dans \mathbf{P}_n^\bullet est fini et ce peu importe n . Ce nombre est égal à 2 si $n = 1$ et à n^2 si $n \geq 2$. Nous laissons la démonstration, relativement facile, de ce résultat au lecteur. À titre d'exemple, nous avons illustré les 16 arcs étiquetés de \mathbf{P}_4^\bullet à la figure 3.

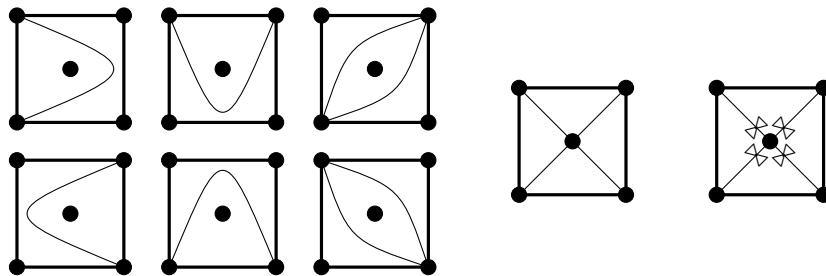


FIGURE 3 – Représentants des 16 arcs étiquetés admis dans le 4-gone (carré) à une ponction \mathbf{P}_4^\bullet . Les six carrés à gauche contiennent les 8 arcs de type I, celui du centre, les 4 arcs de type II et celui à droite, les 4 arcs de type III.

2.3 La compatibilité des arcs

Afin de diviser complètement $\mathbf{P}_n^\bullet = (\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$ en « triangles étiquetés » à sommets dans \mathbf{M}_p , plus d'un arc est nécessaire. Cependant, certains arcs ne peuvent être utilisés simultanément parce qu'ils sont incompatibles. Par exemple, nous ne devons pas considérer deux arcs qui se coupent, car leur intersection génère un sommet qui n'est pas un point marqué. Notons que puisque nous travaillons avec des classes d'isotopie, il faut être prudent lorsque nous parlons d'intersection et plus généralement, de compatibilité. De nouveau, nous commençons par les arcs simples ou non étiquetés.

Définition 2.8. Deux arcs simples y et p dans $\mathbf{P}_n^\bullet = (\mathbf{S}_p, \mathbf{M}_p)$ sont dits *compatibles* si et seulement s'il existe des représentants y' et p' dans leur classe d'isotopie respective qui ne s'intersectent pas dans $\text{int}(\mathbf{S}_p)$. Sinon, ils sont dits *incompatibles*.

De façon équivalente, nous pouvons plutôt exiger que y' et p' ci-haut ne s'intersectent pas en dehors de \mathbf{M}_p . Entre autres, un arc simple est compatible avec lui-même, car il est toujours possible d'identifier deux représentants de sa classe qui satisfont cette condition. Toutefois, la compatibilité n'est pas transitive. Plus précisément, si deux arcs simples x et y sont compatibles et si cela vaut aussi pour y et un autre arc simple z , alors il arrive que x et z ne le soient pas.

Naturellement, la notion de compatibilité pour les arcs étiquetés ne fait pas seulement intervenir leur forme, mais aussi leurs étiquettes. Sa définition de base, qui est applicable aux surfaces marquées autres que \mathbf{P}_n^\bullet , est la suivante :

Définition 2.9. Deux arcs étiquetés γ et ρ dans \mathbf{P}_n^\bullet avec version non étiquetée respective y et p sont dits *compatibles* si et seulement si les conditions ci-dessous sont satisfaites :

- Les arcs y et p sont compatibles au sens de la définition 2.8 ;
- Si y et p ne sont pas équivalents et partagent un point marqué M , alors l'étiquette de γ et celle de ρ qui voient M sont identiques ;
- Si y et p sont équivalents, alors au moins un bout de γ est étiqueté de la même manière que le bout correspondant de ρ .

Sinon, γ et ρ sont dits *incompatibles*.

La compatibilité des arcs étiquetés est également réflexive, mais pas transitive. Afin de clarifier cette nouvelle notion, nous avons illustré les 9 arcs étiquetés de \mathbf{P}_3^\bullet et leurs liens de compatibilité à la figure 4.

Puisque nous nous limitons à une seule surface, nous pouvons traduire la définition précédente en règles de compatibilité spécifiques aux arcs de \mathbf{P}_n^\bullet . En considérant de plus les trois types identifiés à la remarque 2.7, nous obtenons les règles ci-dessous :

Remarque 2.10. Soient γ et ρ deux arcs étiquetés dans \mathbf{P}_n^\bullet et y et p leur version non étiquetée respective.

- Si γ ou ρ est de type I, alors γ et ρ sont compatibles si et seulement si y et p le sont.
- Si γ est de type II et ρ de type III ou vice versa, alors γ et ρ sont compatibles si et seulement si y et p sont équivalents.
- Si γ et ρ sont tous deux de type II ou tous deux de type III, alors ils sont compatibles.

La justification derrière cette remarque est la suivante. En premier lieu, si γ ou ρ est de type I, alors les points marqués qu'ils peuvent partager se situent sur la frontière de \mathbf{P}_n^\bullet . Comme nous le savons, celle-ci force les bouts qui la voisinent à être étiquetés « plain ». Ainsi, les étiquettes de γ et de ρ à leurs extrémités communes, s'il y en a, correspondent et seule la première condition de la définition 2.9 est à vérifier. En second lieu, les arcs des types II et III, par eux-mêmes, ne font pas intervenir les intersections, car elles sont toujours évitables. Par conséquent, leur compatibilité suit plutôt de la deuxième et troisième condition de la définition 2.9.

2.4 Les triangulations étiquetées

Nous avons établi que la compatibilité des arcs étiquetés n'est pas transitive. Or, la possibilité de trouver plus de deux arcs qui sont compatibles entre eux est réelle. En fait, ce sont les regroupements de tels arcs qui, sous une condition supplémentaire de maximalité, forment les triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet .

Plus précisément, les arcs d'une collection C sont dits *compatibles deux à deux* si pour toute paire $\{\gamma, \rho\} \subset C$, γ et ρ sont compatibles. Lorsqu'il est impossible d'ajouter un arc quelconque μ à C , c'est-à-dire que μ est incompatible avec au moins un arc de C , nous disons que la collection est *maximale*.

Définition 2.11. Soit $n \geq 2$. Une collection maximale d'arcs étiquetés compatibles deux à deux dans \mathbf{P}_n^\bullet se nomme une *triangulation étiquetée* de \mathbf{P}_n^\bullet .

Afin d'alléger davantage le texte et lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion, nous omettrons le qualificatif « étiquetée ».

Avant de commencer l'étude des triangulations, mentionnons que l'exclusion ci-haut du cas $n = 1$ est justifiée. De un, elle est en accord avec la définition 2.1 de [FST08]. La raison donnée par ses auteurs est que le monogone à une ponction \mathbf{P}_1^\bullet n'admet qu'une seule triangulation. Cette dernière ne correspond pas à notre définition 2.11 et implique plutôt une variante de nos arcs simples. Cependant, cette raison vaut aussi pour nos arcs étiquetés puisqu'un arc de type II et un de type III sont nécessaires et suffisent pour « trianguler » \mathbf{P}_1^\bullet . De deux, plusieurs résultats et définitions ne s'appliqueront (clairement) pas lorsque $n = 1$. Entre autres, le flip d'arc n'est pas défini dans \mathbf{P}_1^\bullet et cela nous empêche de conclure une équivalence entre le monogone et l'algèbre amassée de type D_1 . Nous donnons davantage de précisions sur ce sujet à la section 3.

Malgré son appellation, une triangulation étiquetée ne divise pas toujours \mathbf{P}_n^\bullet en triangles. Parfois, une région délimitée par des arcs correspond davantage à un

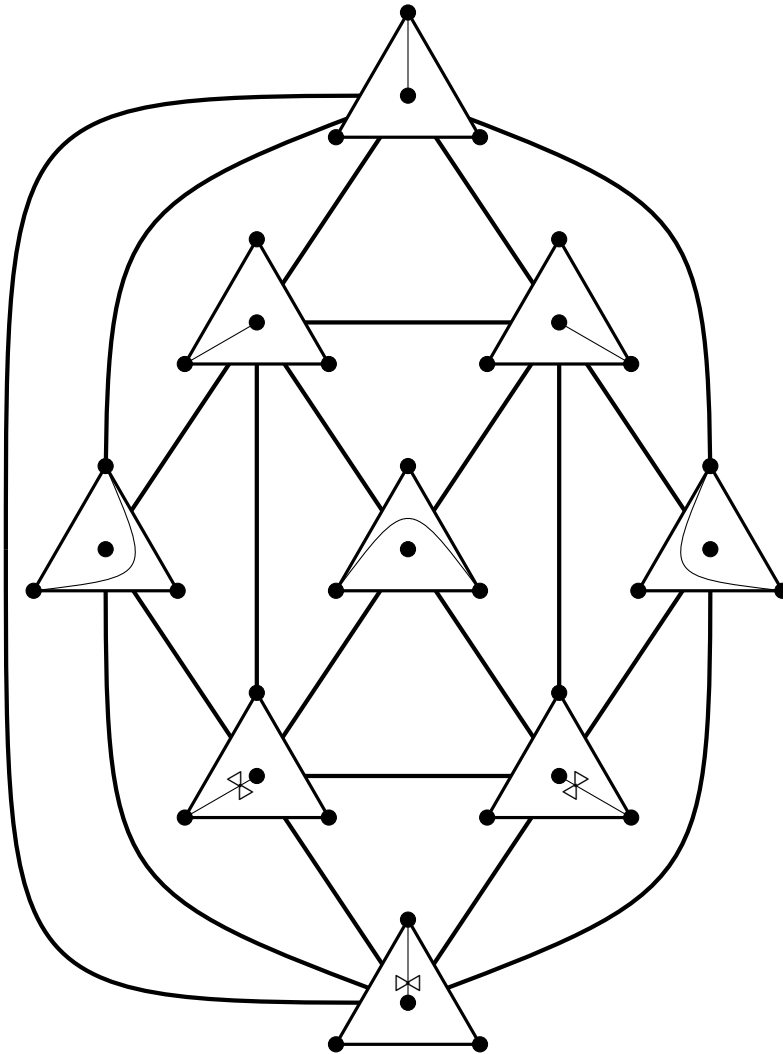


FIGURE 4 – Graphe de compatibilité des 9 arcs étiquetés admis dans le 3-gone (triangle) à une ponction \mathbf{P}_3^\bullet . Chaque triangle contient un arc parmi les 9 et deux triangles sont liés par une arête si et seulement si leurs arcs sont compatibles. L'absence de transitivité parfaite est mise en évidence ici. Nous avons omis les arêtes bouclées qui représentent la nature réflexive de la compatibilité.

digone³ ou un quadrilatère. Cela se produit dans un cas particulier : lorsque deux arcs étiquetés γ et ρ de type II et III respectivement sont conjointement utilisés. Rappelons que dans ce cas, γ et ρ sont deux courbes reliant la ponction au même point marqué sur la frontière. Toutefois, l'usage du terme « triangulation » persiste par analogie aux triangulations standards qui, à la base, sont aussi des collections maximales (d'arcs « normaux »).

Lorsque nous obtenons bien des triangles, ceux-ci ne rejoignent pas toujours leur définition classique en géométrie euclidienne. De un, il arrive que leurs côtés, en étant des arcs ou une partie de la frontière de \mathbf{P}_n^\bullet , soient courbés. De deux, les angles intérieurs peuvent dépasser 90 degrés et deux triangles adjacents ne sont pas limités au partage d'un seul côté. Les triangulations étiquetées de \mathbf{P}_2^\bullet et \mathbf{P}_3^\bullet , que nous présentons aux figures 5 et 6 respectivement, illustrent bien ces situations. Les arêtes reliant les triangulations dans ces figures ont un sens dont la description est reportée à la section 2.5. Bref, un triangle doit être vu ici comme une région délimitée par trois points et trois courbes. À homéomorphisme près, elle correspond à un disque avec trois points sur sa frontière.

Dans [FST08], il est démontré que le nombre d'arcs composant une triangulation étiquetée (d'une surface marquée générale) est invariant par rapport à la surface. Pour \mathbf{P}_n^\bullet spécifiquement, ce résultat prend la forme suivante :

Théorème 2.12 (Théorème 7.9 de [FST08], première partie). *Si $n \geq 2$, alors toute triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet est composée de n arcs étiquetés.* \square

L'invariant n est appelé le *rang* de \mathbf{P}_n^\bullet . Cette terminologie vient du fait que le type d'algèbre amassée associé à cette surface, D_n , est de rang n . La section 3 contient plus de détails à ce sujet.

2.5 Le flip d'arc étiqueté

En essence, l'opération du flip consiste à transformer une triangulation étiquetée en une autre par un changement local sur sa configuration d'arcs. Elle permet ainsi de lier les triangulations de \mathbf{P}_n^\bullet et de créer une combinatoire similaire à celle retrouvée dans les algèbres amassées. Notre définition du flip repose sur la seconde affirmation du théorème 7.9 de [FST08] qui est ici adaptée à \mathbf{P}_n^\bullet .

Théorème 2.13 (Théorème 7.9 de [FST08], seconde partie). *Si $n \geq 2$, alors toute collection de $n - 1$ arcs étiquetés compatibles deux à deux dans \mathbf{P}_n^\bullet est incluse dans exactement deux triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet .* \square

En vertu de cette affirmation, tout arc γ dans une triangulation quelconque T admet un unique substitut γ' compatible avec les $n - 1$ autres arcs de T . En effet, puisque T est une collection maximale d'arcs compatibles deux à deux, $T \setminus \{\gamma\}$ est une collection de $n - 1$ arcs aussi compatibles deux à deux. Ainsi, elle est incluse dans exactement deux triangulations de \mathbf{P}_n^\bullet et le choix d'un n^e

³Celui-ci est délimité par les arcs γ et ρ décrits un peu plus loin et non par un seul arc dans \mathbf{P}_n^\bullet . Il n'y a donc pas de contradiction avec la définition 2.4. De plus, notons qu'en superposant ces deux arcs, le digone disparaît. Il n'est donc pas une conséquence immédiate de leur union.

arc pour la compléter se limite à deux candidats. L'un d'eux est évidemment γ , mais l'autre, cependant, est un arc γ' qui ne lui est pas équivalent. Grâce à ce constat, nous pouvons correctement définir le flip de la manière suivante :

Définition 2.14. Le *flip* d'un arc étiqueté γ dans une triangulation étiquetée T de \mathbf{P}_n^\bullet est l'opération qui retire γ de T et qui le remplace par l'unique arc γ' différent de γ qui, avec les arcs restants, forme une nouvelle triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet notée $\mathfrak{F}_\gamma(T)$ ou T' .

Dans une triangulation, il arrive régulièrement que deux triangles adjacents ne partagent qu'un seul côté et que l'arc γ à substituer soit ce côté. Ces triangles forment un quadrilatère et γ correspond alors à l'une de ses deux diagonales. Dans ce cas, il est aisé d'identifier le substitut γ' , car il est équivalent à la seconde diagonale, soit le seul autre arc dont l'ajout triangule aussi le quadrilatère. De manière figurée, le passage de γ à γ' équivaut à tourner ou « flipper » γ d'où l'origine du nom de l'opération. Sinon, identifier γ' requiert une certaine aisance à travailler avec les arcs étiquetés qui se développe avec la pratique.

Aux figures 5 et 6, en plus d'avoir représenté toutes les triangulations de \mathbf{P}_2^\bullet et de \mathbf{P}_3^\bullet , nous les avons liées par des arêtes qui représentent les flips. La structure résultante est un graphe d'échange dont la définition formelle et les propriétés sont présentées à la section 3. Pour le moment, nous terminons la section actuelle avec une remarque plutôt évidente, mais tout de même pertinente à préciser :

Remarque 2.15. Le flip d'un arc étiqueté γ dans une triangulation étiquetée T de \mathbf{P}_n^\bullet est tel que $\mathfrak{F}_{\gamma'}(\mathfrak{F}_\gamma(T)) = T$. Autrement dit, il est son « propre inverse ».

L'expression « propre inverse » est mise entre parenthèses parce qu'elle n'est pas tout à fait exacte ici. En effet, l'inverse $\mathfrak{F}_{\gamma'}$ n'utilise pas γ , mais bien γ' . Toutefois, nous pouvons indiquer les n arcs de T avec les naturels de 1 à n . Si l'arc d'indice k est flippé, alors son substitut hérite de l'identifiant numérique. Cette opération peut être notée \mathfrak{F}_k sans risque de confusion. Dans ce contexte, nous avons bien que $\mathfrak{F}_k(\mathfrak{F}_k(T)) = T$, soit que le flip est son propre inverse. Le terme « *involutif* » permet aussi de qualifier ce type d'opération.

3 Graphes d'échange et isomorphisme

Les triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet ne sont pas liées à l'algèbre amassée de type D_n en soi, mais plutôt à la combinatoire derrière ses graines qui est décrite par son graphe d'échange. Dans cette section, nous présentons plus en détail le graphe (d'échange) associé à D_n et à \mathbf{P}_n^\bullet respectivement et établissons qu'ils sont isomorphes. Le lecteur initié aux algèbres amassées ou familier avec la matière de la section 2 de [Bou12] peut passer directement à la définition 3.1. Sinon, le prochain paragraphe en explique brièvement les fondements, mais à un niveau suffisant pour que le théorème 3.4 paraisse sensé et que les idées qui lui sont rattachées soient compréhensibles.

Soit $n \geq 1$ un entier. Une *graine* d'une *algèbre amassée de rang n* est une paire $G = (X, B)$ où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un ensemble ou *amas* de n variables

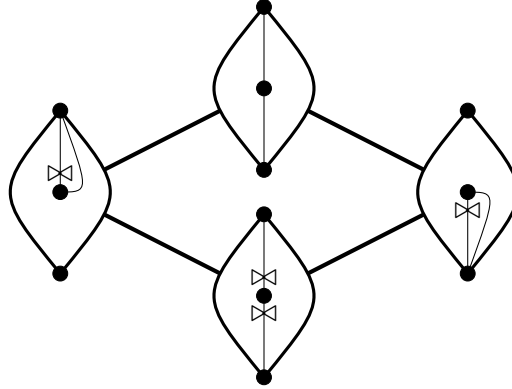


FIGURE 5 – Les 4 triangulations étiquetées du digone à une ponction \mathbf{P}_2^\bullet . Seulement celles du haut et du bas divisent le digone en (deux) triangles. De plus, une paire de triangulations est liée par une arête si et seulement si l’une s’obtient de l’autre par un flip. L’arc flippé est celui qui n’est pas commun aux triangulations de la paire. Cette structure correspond au graphe d’échange $\mathbf{E}^{\times}(\mathbf{P}_2)$.

amassées et B une *matrice d’échange* de dimension $n \times n$ dans \mathbb{Z} . Si l’algèbre est de type D_n , alors la matrice B , en plus d’être limitée à des formes spécifiques, est toujours antisymétrique. Ainsi, elle est associable à un graphe Q orienté sans boucles ni 2-cycles. Ces caractéristiques font de Q un *carquois*. La *mutation* μ_k dans une direction $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ est une opération qui transforme Q en un autre carquois $Q' = \mu_k(Q)$ ou $G = (X, Q)$ en une autre graine $G' = \mu_k(G) = (X', Q')$. Le carquois Q' se distingue de Q par des changements de flèches dans le voisinage du sommet d’indice k , mais il lui est identique ailleurs. Quant à l’amas X' , il contient les mêmes variables que X à l’exception de x_k qui est remplacée par une autre variable x'_k dont la forme dépend de Q et de X . La mutation est involutive, c’est-à-dire que $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$ et que $\mu_k(\mu_k(G)) = G$.

Le nombre de graines pouvant être obtenues d’une graine initiale par un processus récursif de mutation couvrant toutes les directions est potentiellement infini. Or, puisque D_n est de type fini, ce processus, dans notre cas, produit un nombre fini de graines. Les interactions entre les graines et les mutations sont encodées dans le graphe d’échange.

Définition 3.1. Le *graphe d’échange de l’algèbre amassée de type D_n* est le graphe simple $\mathbf{EG}(D_n) = (V_A, E_A)$ où⁴ :

- l’ensemble des sommets V_A est l’ensemble de toutes les graines qui sont liées, par une suite de mutations, à une graine initiale (X, Q) dont le carquois Q est de type Dynkin D_n ([Bou12], Définition 2.17)⁵ ;

⁴Le graphe $\mathbf{EG}(D_n)$ est aussi appelé *associaèdre de type D en dimension n* . En réalité, il ne correspond pas à l’associaèdre de type D même qui est un polytope, mais plutôt au graphe issu de la structure de ses sommets et de ses arêtes.

⁵Le type Dynkin D_n est noté \mathbb{D}_n dans [Bou12].

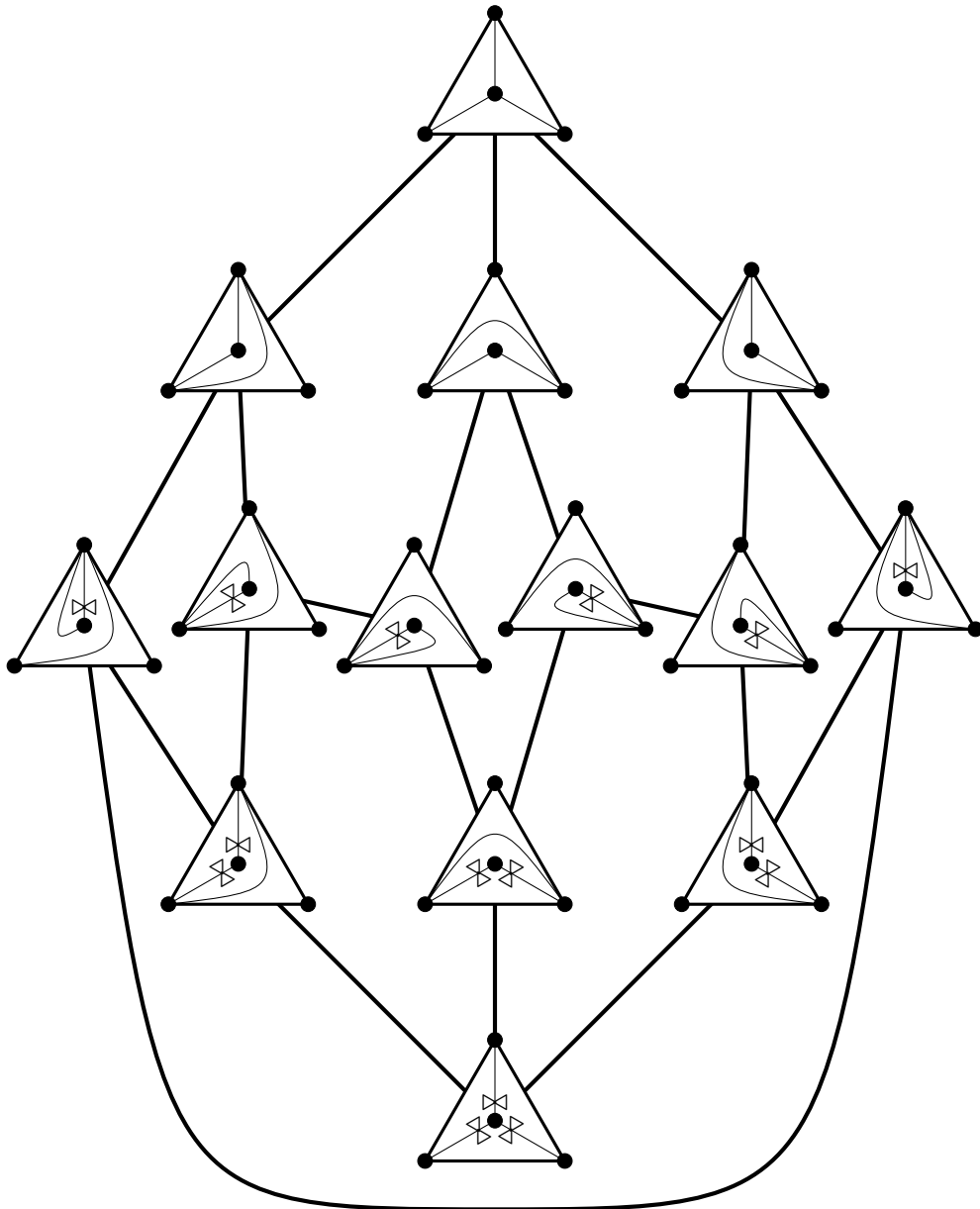


FIGURE 6 – Les 14 triangulations étiquetées du 3-gone (triangle) à une ponction \mathbf{P}_3^\bullet . À l'exception de 6 qui occupent l'équateur, elles divisent \mathbf{P}_3^\bullet en (trois) triangles. De plus, une paire de triangulations est liée par une arête si et seulement si l'une s'obtient de l'autre par un flip. L'arc flippé est celui qui n'est pas commun aux triangulations de la paire. Cette structure correspond au graphe d'échange $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_3^\bullet)$.

- l'ensemble des arêtes $E_{\mathcal{A}} \subset \{\{G_1, G_2\} \mid G_1, G_2 \in V_{\mathcal{A}}, G_1 \neq G_2\}$ est tel que $\{G_1, G_2\} \in E_{\mathcal{A}}$ si et seulement si la graine G_1 peut s'obtenir de la graine G_2 par une (seule) mutation.

Le graphe $\mathbf{EG}(D_n)$ est d'évidence fini parce que D_n est de type fini, mais il est aussi *connexe* et *régulier de degré n* . Cela signifie que toute paire de sommets est liée par une chaîne (ou une suite de mutations) et que tout sommet est incident à n arêtes (ou mutations), soit une pour chaque direction $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Quoique la définition 3.1 dépeint l'essentiel du graphe d'échange de D_n et suffit pour nos besoins, elle n'est pas tout à fait exacte. En réalité, $V_{\mathcal{A}}$ est quotienté par une relation d'équivalence qui est traitée à la section 7 de [FZ02]. Dans le cas D_n , cette relation se simplifie en vertu du théorème 1.12 de [FZ03a] et deux graines (X_1, Q_1) et (X_2, Q_2) sont équivalentes si et seulement si $X_1 = X_2$. Nous ne creusons pas davantage le sujet, cependant la notation $\mathbf{EG}(D_n)$ désignera le vrai graphe d'échange par souci de rigueur.

Nous pouvons associer aux triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet un graphe similaire à $\mathbf{EG}(D_n)$ qui encode les interactions entre les triangulations et les flips.

Définition 3.2. Soit $n \geq 2$. Le *graphe d'échange des triangulations étiquetées du n -gone à une ponction \mathbf{P}_n^\bullet* est le graphe simple $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet) = (V_{\mathcal{T}}, E_{\mathcal{T}})$ où :

- l'ensemble des sommets $V_{\mathcal{T}}$ est l'ensemble de toutes les triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet ;
- l'ensemble des arêtes $E_{\mathcal{T}} \subset \{\{T_1, T_2\} \mid T_1, T_2 \in V_{\mathcal{T}}, T_1 \neq T_2\}$ est tel que $\{T_1, T_2\} \in E_{\mathcal{T}}$ si et seulement si la triangulation T_1 peut s'obtenir de la triangulation T_2 par un (seul) flip.

Les figures 5 et 6 que nous avons mentionnées précédemment sont une illustration de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_2^\bullet)$ et de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_3^\bullet)$ respectivement. Pour tout $n \geq 2$, le graphe $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ est fini, connexe et régulier de degré n tout comme $\mathbf{EG}(D_n)$. Sa finitude suit de celle du nombre d'arcs dans \mathbf{P}_n^\bullet , sa connexité, de la proposition 7.10 de [FST08], et sa n -régularité, de nos théorèmes 2.12 et 2.13.

Plus fondamentalement, les graines associées au type D_n et les triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet sont analogues sur plusieurs points. Par exemple, toute graine $G \in V_{\mathcal{A}}$ contient n variables amassées et toute triangulation $T \in V_{\mathcal{T}}$ est composée de n arcs. Autre exemple : deux graines liées par une mutation se distinguent, sur le plan des amas, par une variable seulement. Pareillement, deux triangulations liées par un flip n'ont qu'un seul arc de différent. Notons aussi que la mutation et le flip sont tous deux des opérations involutives. Ces similarités demeurent si nous remplaçons D_n par une algèbre amassée de rang n quelconque. Cependant, D_n et \mathbf{P}_n^\bullet présentent des ressemblances spécifiques qui révèlent leur équivalence. Entre autres, le nombre de variables amassées observables dans les graines de $V_{\mathcal{A}}$ est égal à n^2 ([Ngu07], Proposition 2.6), soit au nombre d'arcs dans \mathbf{P}_n^\bullet lorsque $n \geq 2$. Nous allons maintenant énoncer cette équivalence, mais auparavant, nous rappelons le concept d'isomorphisme pour les graphes.

Rappel 3.3. Deux graphes simples $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection $f : V_1 \rightarrow V_2$ où pour tous sommets v et w dans V_1 , l'arête $\{v, w\}$ est dans E_1 si et seulement si l'arête $\{f(v), f(w)\}$ est dans E_2 . Une telle fonction f est un *isomorphisme*.

En termes simples, dire que deux graphes sont isomorphes signifie qu'ils sont identiques structurellement.

Théorème 3.4. *Si $n \geq 2$, alors $\mathbf{EG}(D_n)$ et $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ sont isomorphes.*

Ce théorème n'est pas formulé explicitement dans [FST08], mais il en est une conséquence implicite. Nous n'insistons pas pour le prouver rigoureusement, car cela implique des notions qui dépassent le cadre de cet article. Toutefois, nous donnons l'information nécessaire afin que le lecteur intéressé et préférablement initié aux algèbres amassées puisse le faire.

Démonstration du théorème 3.4 (esquisse). Le résultat découle directement du théorème 7.11 de [FST08] si la surface marquée $(\mathbf{S}, \mathbf{M}) = \mathbf{P}_n^\bullet$ et l'algèbre amassée $\mathcal{A} = D_n$ satisfont deux conditions. Puisque \mathbf{P}_n^\bullet est inclus dans la définition 2.1 de [FST08] lorsque $n \geq 2$ et possède une frontière, il satisfait la première⁶.

Étant donnée T une triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet , il est possible de lui associer un carquois $B(T)$ sous la forme d'une matrice antisymétrique. La procédure à suivre fait l'objet des définitions 4.1 et 9.6 de [FST08]. En lien avec celles-ci, le théorème 7.11 exige que l'ensemble des carquois $B(T)$ issus des triangulations de \mathbf{P}_n^\bullet soit égal à l'ensemble des carquois Q composant les graines de D_n . C'est la seconde condition à considérer et elle est satisfaite pour deux raisons. De un, il existe une triangulation T^* où $B(T^*)$ est un carquois de type Dynkin D_n . Un exemple de forme admissible pour T^* est dessiné dans l'image de droite à la figure 14 de [FST08]. De deux, en vertu du lemme 9.7 de [FST08], la mutation de carquois μ_k est compatible avec le flip d'arc \mathfrak{F}_γ . Concrètement, si γ est un arc d'indice k dans une triangulation T , alors $B(\mathfrak{F}_\gamma(T)) = \mu_k(B(T))$. Ces arguments suffisent pour conclure l'égalité entre les deux ensembles de carquois. \square

Grâce au théorème 3.4 (et lorsque $n \geq 2$), nous pouvons aborder les problèmes reliés au graphe d'échange de D_n du point de vue des triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet . Un de leurs avantages est qu'elles offrent une vision plus concrète et intuitive de $\mathbf{EG}(D_n)$.

4 Structure et diamètre de $\mathbf{EG}(D_n)$

Le graphe d'échange de l'algèbre amassée de type D_n étant présenté, nous nous concentrons maintenant sur son diamètre et sur les stratégies pour le calculer. Tout d'abord (et puisque nous ne l'avons pas encore fait), nous définissons rigoureusement le diamètre d'un graphe et un concept qui lui est préalable : la distance entre deux sommets.

⁶Plus précisément, cette condition est satisfaite parce que \mathbf{P}_n^\bullet n'est pas une surface « closed ». Ce qualificatif veut dire « compacte et sans frontière ».

Définition 4.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. La *distance* entre deux sommets $v_1, v_2 \in V$ de G , notée $d(v_1, v_2)$, est la longueur d'une chaîne minimale entre v_1 et v_2 .

Dans $\mathbf{EG}(D_n) = (V_{\mathcal{A}}, E_{\mathcal{A}})$, la distance $d(G_1, G_2)$ équivaut au nombre minimal de mutations à effectuer pour passer d'une graine $G_1 \in V_{\mathcal{A}}$ à une graine $G_2 \in V_{\mathcal{A}}$. Parallèlement, dans $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet}) = (V_{\mathcal{T}}, E_{\mathcal{T}})$, $d(T_1, T_2)$ équivaut au nombre minimal de flips à effectuer pour passer d'une triangulation $T_1 \in V_{\mathcal{T}}$ à une triangulation $T_2 \in V_{\mathcal{T}}$. Nous avons établi à la section 3 que les deux graphes d'échange sont connexes, soit que toute paire de sommets est liée par une suite de mutations ou de flips. Ainsi, les quantités $d(G_1, G_2)$ et $d(T_1, T_2)$ sont toujours définies.

Le *diamètre* d'un graphe est une mesure de l'éloignement maximal entre ses sommets. Plus précisément, il correspond à la distance maximale pouvant être observée dans le graphe. Pour $\mathbf{EG}(D_n)$ en particulier, nous disons que :

Définition 4.2. Le *diamètre du graphe d'échange de l'algèbre amassée de type D_n* est

$$\text{diam}(D_n) = \max\{d(G_1, G_2) \mid G_1, G_2 \in V_{\mathcal{A}}\}.$$

Quoique les graphes $\mathbf{EG}(D_n)$ et $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet})$ ne soient pas identiques, leur structure l'est lorsque $n \geq 2$ en vertu du théorème 3.4. Entre autres, leur diamètre sont égaux et $\text{diam}(D_n)$ peut donc aussi désigner le diamètre de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet})$. Cette définition alternative est soulignée ci-dessous.

Définition 4.3. Si $n \geq 2$, alors $\text{diam}(D_n) = \max\{d(T_1, T_2) \mid T_1, T_2 \in V_{\mathcal{T}}\}$.

Naturellement, nous sommes confrontés au choix de favoriser l'une ou l'autre des deux définitions. Nous décidons ici de travailler avec $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet})$, car la structure du graphe d'échange se visualise plus facilement avec les triangulations étiquetées. Cette option n'est pas offerte si $n = 1$; toutefois, le diamètre de $\mathbf{EG}(D_1)$ se détermine sans effort. Nous revenons là-dessus au théorème 4.13.

Dans les pages qui suivent, nous présentons une solution menant au diamètre de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet})$ pour tout $n \geq 2$. Elle s'inspire de la section 3 de [CP14], mais s'en distingue de par son utilisation des triangulations étiquetées, son caractère plus rigoureux et son rythme, plus progressif. À la section 4.1, nous introduisons la notion de niveau dans $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet})$ et déduisons quelques lemmes grâce à elle. Ensuite, à la section 4.2, nous calculons le diamètre du graphe d'échange. Notez qu'à moins d'une confirmation ou d'une indication contraire, les définitions et les résultats de ces sections sont implicitement restreints au cas $n \geq 2$.

4.1 Les niveaux

Malgré l'apport visuel des triangulations étiquetées, le problème que nous avons en main demeure difficile. Sa résolution nécessite de bien connaître la structure de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_{\mathbf{n}}^{\bullet})$ et cette dernière dépend d'un entier $n \geq 2$. Si n est très petit, par exemple si $n = 2$ ou $n = 3$, elle peut être visualisée en dessinant le graphe comme aux figures 5 et 6. Cependant, cette stratégie devient rapidement impraticable

lorsque n augmente⁷. Ainsi, la structure de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$, et en conséquence, son diamètre, nous échappent en général. Heureusement, cette difficulté est surmontable et pour y parvenir, nous nous inspirons du cas familier $n = 3$.

La façon dont $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_3^\bullet)$ est illustré à la figure 6 est délibérée. Nous pouvons remarquer que le graphe est disposé en strates ou niveaux. Plus précisément, ces niveaux regroupent les triangulations dont le nombre et les types d'arcs incidents à la ponction sont identiques. Si deux niveaux sont adjacents, c'est-à-dire que l'un est pile au-dessus de l'autre, alors il y a des arêtes entre leurs triangulations. À l'inverse, s'ils ne le sont pas, alors il n'y a aucune arête entre elles. En somme, ces niveaux et l'information qu'ils apportent permettent d'éclaircir la structure du graphe, et donc de faciliter le calcul de son diamètre.

Les attributs que nous avons identifiés afin de faire ressortir cette architecture ne sont pas exclusifs au cas $n = 3$. Par conséquent, il est raisonnable de penser que nos observations sur $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_3^\bullet)$ se généralisent à $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ pour tout $n \geq 2$. Cette hypothèse constitue la ligne directrice de cette sous-section et sa démonstration requiert deux actions. En premier lieu, nous devons fixer les attributs qui regroupent les triangulations de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ en niveaux. Il suit du paragraphe précédent que nous avons besoin, au plus, des trois fonctions suivantes :

Définition 4.4. Soit $V_{\mathcal{T}}$ l'ensemble des triangulations étiquetées de \mathbf{P}_n^\bullet . Nous définissons les fonctions p , S et δ sur $V_{\mathcal{T}}$ de la manière suivante :

1. $p : V_{\mathcal{T}} \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ envoie chaque triangulation $T \in V_{\mathcal{T}}$ sur l'entier $p(T)$ correspondant au nombre d'arcs de T qui sont incidents à la ponction.
2. $S : V_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{P}(\{\text{plain}, \text{notched}\})$ envoie chaque triangulation $T \in V_{\mathcal{T}}$ sur l'ensemble $S(T)$ des étiquettes observées dans T qui voisinent la ponction.
3. $\delta : V_{\mathcal{T}} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ envoie chaque triangulation $T \in V_{\mathcal{T}}$ sur sa *signature* $\delta(T)$ dont la valeur est déterminée par la règle ci-dessous :

$$\delta(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S(T) = \{\text{plain}\}; \\ -1 & \text{si } S(T) = \{\text{notched}\}; \\ 0 & \text{si } S(T) = \{\text{plain}, \text{notched}\}. \end{cases}$$

L'appellation « signature » nous vient de la définition 9.1 de [FST08] où S et δ sont présentées dans un contexte plus général. Notons de plus que la signature $\delta(T)$ d'une triangulation T est redondante par rapport à l'ensemble $S(T)$, car les deux apportent la même information. Or, $S(T)$ est préalable à $\delta(T)$ qui nous sera utile de par sa nature numérique et sa concision.

L'omission du cas $S(T) = \emptyset$ dans la définition de δ est volontaire, car cette égalité ne vaut pour aucune triangulation. De façon générale, nous pouvons réaliser que certaines combinaisons de $p(T)$, $S(T)$ et $\delta(T)$ sont impossibles. Dans une

⁷Le nombre de triangulations dans $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ est égal à $\frac{3n-2}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ ([FZ03b], Proposition 3.8) et croît de manière importante. Par exemple, ce nombre est égal à 50 lorsque $n = 4$ et à 182 lorsque $n = 5$. Bref, il est fortement déconseillé de dessiner $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ lorsque $n \geq 5$.

optique de classification en niveaux comme la nôtre, il est pertinent d'énumérer celles pouvant être rencontrées.

Lemme 4.5. *Si T est une triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet , alors $p(T)$, $S(T)$ et $\delta(T)$ respectent un et seulement un des trois scénarios suivants :*

- (i) $p(T) \geq 2$, $S(T) = \{\text{plain}\}$ et $\delta(T) = 1$;
- (ii) $p(T) \geq 2$, $S(T) = \{\text{notched}\}$ et $\delta(T) = -1$;
- (iii) $p(T) = 2$, $S(T) = \{\text{plain}, \text{notched}\}$ et $\delta(T) = 0$.

De plus, la ponction et les arcs étiquetés de T qui lui sont incidents sont délimités par un polygone $Q_{p(T)}^\bullet$ à $p(T)$ côtés.

Démonstration. Il est évident que ces trois scénarios sont réalisables et disjoints. Il suffit donc de valider qu'ils sont les seuls possibles. De plus, cette démarche nous permet de prouver l'existence du $p(T)$ -gone délimitant.

Validons d'abord la restriction $p(T) = 2$ dans le scénario (iii). Soit T une triangulation de \mathbf{P}_n^\bullet où $S(T) = \{\text{plain}, \text{notched}\}$. D'une part, $p(T) \geq 2$, car T est composée d'au moins un arc γ de type II et d'au moins un arc γ_{\bowtie} de type III. D'autre part, il suit du deuxième point de la remarque 2.10 que $p(T) \leq 2$. Plus précisément, les arcs γ et γ_{\bowtie} coexistent ensemble, car leur version non étiquetée sont équivalentes. Or, cette configuration entraîne l'impossibilité d'ajouter un troisième arc de type II ou III.

Ensuite, penchons-nous sur la restriction $p(T) \geq 2$ qui est générale. Soit T une triangulation quelconque de \mathbf{P}_n^\bullet . Il existe, dans cette surface, un k -gone à une ponction Q_k^\bullet minimal pour $k \leq n$ et borné par la frontière de \mathbf{P}_n^\bullet ou par des arcs de type I appartenant à T . Pour l'identifier, nous retirons les $p(T)$ arcs de type II ou III dans \mathbf{P}_n^\bullet et Q_k^\bullet correspond alors au plus petit polygone à contenir la ponction. Dû à sa minimalité, il ne délimite aucun arc de type I. En revanche, il délimite les $p(T)$ arcs incidents à la ponction. Puisque T forme une triangulation de \mathbf{P}_n^\bullet , alors ces $p(T)$ arcs forment une triangulation de Q_k^\bullet . De plus, puisque Q_k^\bullet possède k côtés, alors en vertu du théorème 2.12, $p(T) = k$. Ainsi, $Q_k^\bullet = Q_{p(T)}^\bullet$. Finalement, rappelons que les arcs de type I bornant $Q_{p(T)}^\bullet$, s'ils existent, ne peuvent délimiter de monogone. Par conséquent, $k = p(T) \geq 2$. \square

Le résultat sur le polygone délimitant $Q_{p(T)}^\bullet$ est un ajout facultatif par rapport aux scénarios, mais il nous servira dans la preuve du lemme 4.8.

En second lieu, nous devons définir les niveaux de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$ et leur donner un ordre, le tout en fonction des images de p , S et de δ . L'utilisation d'entiers pour identifier les niveaux est adéquate, car \mathbb{Z} est naturellement ordonné. Cependant, elle doit être astucieuse, car nous désirons une connexion entre la superposition des niveaux et la structure de $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_n^\bullet)$. Dans les prochains paragraphes, nous montrons que la définition suivante satisfait cette volonté :

Définition 4.6. Soit T une triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet . Le *niveau* de T est la quantité entière

$$\text{niv}(T) = \delta(T)(p(T) - 1).$$

Cette formule peut paraître arbitraire, mais en réalité, elle est essentiellement le produit de deux constatations. D’abord, il y a la nécessité de raffiner les trois scénarios du lemme 4.5. Ces derniers, par commodité, sont définis en fonction des valeurs de $\delta(T)$ (ou $S(T)$). Or, dû à cela, les deux premiers scénarios admettent plusieurs possibilités pour $p(T)$ et en raison de notre étude exploratoire sur $\mathbf{E}^{\times}(\mathbf{P}_3^{\bullet})$, il faut les distinguer. Puisque $p(T) \leq n$, nous discernons $n - 1$ sous-scénarios ou niveaux pour (i), $n - 1$ pour (ii) et un seul pour (iii). Chacun d’entre eux est identifié par une paire $(p(T), \delta(T))$ unique qui, dans le cadre d’une bonne définition de $\text{niv}(T)$, doit être associée à un entier également unique. Notre formule répond à cette exigence et pour s’en convaincre, la figure 7 jumelle les paires $(p(T), \delta(T))$ à leur niveau correspondant.

$\text{niv}(T)$	$-n + 1$	\cdots	-3	-2	-1	0	1	2	3	\cdots	$n - 1$
$p(T)$	n	\cdots	4	3	2	2	2	3	4	\cdots	n
	$\delta(T) = -1$					$\delta(T) = 0$	$\delta(T) = 1$				

FIGURE 7 – Tableau des valeurs de $\text{niv}(T)$ en fonction de celles de $p(T)$ et de $\delta(T)$. L’augmentation ou la diminution de $\text{niv}(T)$ par 1 implique une variation de même amplitude soit sur $p(T)$ ou soit sur $\delta(T)$.

La seconde constatation, plus importante, derrière la définition 4.6 concerne l’ordonnancement des $2n - 1$ sous-scénarios. En les observant attentivement, nous pouvons réaliser qu’il existe un ordre où les différences entre deux sous-scénarios consécutifs sont minimales. Plus précisément, ces différences sont numériques, ont une amplitude égale à 1 et se rapportent à une seule des quantités suivantes : $p(T)$ et $\delta(T)$. Elles sont apparentes à la figure 7 où les paires $(p(T), \delta(T))$ sont correctement agencées. Concrètement, cet ordre implique que les triangulations d’un niveau se distinguent de celles d’un niveau adjacent essentiellement par l’ajout ou le retrait d’un élément. Celui-ci est soit un arc incident à la ponction ou soit un type d’étiquette qui la voisine.

Notre démarche minimaliste rejoint le flip sur une triangulation T , car l’influence de cette opération est limitée. En effet, puisqu’elle ne remplace qu’un seul arc dans T , elle ne peut, au plus, qu’ajouter ou retirer un arc incident à la ponction ou une étiquette dans $S(T)$. Dans le premier cas, le flip implique un arc de type II ou III et un de type I. Dans le second cas, il implique un arc de type II et un de type III. En vertu de la remarque 2.10 ou du lemme 4.5, cela n’est possible que si $p(T) = 2$. En résumé, nous avons bien une conformité entre l’ordre choisi (ou plus spécifiquement nos niveaux) et les flips.

Remarque 4.7. Soit T une triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^{\bullet} . Si T' est une triangulation issue du flip d’un arc étiqueté de T , alors son niveau, $\text{niv}(T')$, est égal à $\text{niv}(T) - 1$, $\text{niv}(T)$ ou $\text{niv}(T) + 1$. Par conséquent, pour toutes triangulations étiquetées T_1 et T_2 de \mathbf{P}_n^{\bullet} :

$$d(T_1, T_2) \geq |\text{niv}(T_1) - \text{niv}(T_2)|.$$

Au final, la définition 4.6 n'est qu'une façon parmi d'autres de numériser les $2n - 1$ sous-scénarios et leur ordre. Notre expression de $\text{niv}(T)$ est motivée par l'élégance et tire simplement profit des quantités $p(T)$ et $\delta(T)$.

À présent, une interrogation s'impose : pouvons-nous toujours, avec des flips, monter ou descendre dans les niveaux à partir d'une triangulation quelconque ? Bien que la remarque 4.7 fait état de la possibilité, elle ne la garantit pas. Néanmoins, il s'avère que nous pouvons répondre affirmativement à cette question et, du même coup, solidifier la connexion entre les distances et les niveaux.

Lemme 4.8. *Soit T une triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet . Si $\text{niv}(T) < n - 1$, alors il existe un arc $\mu \in T$ tel que $\text{niv}(\mathfrak{F}_\mu(T)) = \text{niv}(T) + 1$. De même, si $\text{niv}(T) > -n + 1$, alors il existe un arc $\epsilon \in T$ tel que $\text{niv}(\mathfrak{F}_\epsilon(T)) = \text{niv}(T) - 1$.*

Démonstration. En vertu du lemme 4.5, la ponction et les $p(T)$ arcs de T qui lui sont incidents sont délimités par un polygone $Q_{p(T)}^\bullet$ à $p(T)$ côtés. Ce dernier sera la base de notre argumentation. Nous procédons cas par cas sur les valeurs de $\text{niv}(T)$ et pour chacun d'entre eux, nous identifions les arcs μ et ϵ .

Cas 1 : $2 \leq |\text{niv}(T)| \leq n - 1$

Dans ce cas, $p(T) \geq 3$ et $|\delta(T)| = 1$. Ainsi, $Q_{p(T)}^\bullet$ délimite au moins trois arcs qui sont tous de type II ou tous de type III. Cela entraîne que la ponction est entourée de $p(T)$ triangles dont deux de leurs côtés sont parmi ces arcs et dont le troisième appartient à la frontière de $Q_{p(T)}^\bullet$. Décrit autrement, chaque triangle est adjacent à deux autres triangles entourant la ponction et inclut ce point dans ses sommets. La figure 9 illustre cette sorte de triangulation.

Si $|\text{niv}(T)| < n - 1$, c'est-à-dire si $p(T) < n$, alors $Q_{p(T)}^\bullet$ est distinct de \mathbf{P}_n^\bullet . Par conséquent, au moins un arc γ composant sa frontière est un arc de type I appartenant à T qui délimite deux triangles plutôt qu'un seul. L'un d'eux, Δ_i , est l'un des $p(T)$ triangles à l'intérieur de $Q_{p(T)}^\bullet$. Le second, Δ_e , occupe la région de \mathbf{P}_n^\bullet à l'extérieur de $Q_{p(T)}^\bullet$. L'union de ces deux triangles forme un quadrilatère et γ en est une diagonale. Pour plus de clarté, cette situation est représentée dans l'image de gauche à la figure 8. Si nous flippons γ , nous le remplaçons par l'autre diagonale du quadrilatère. Cette dernière, à la différence de γ , est incidente à la ponction qui, nous le rappelons, est un sommet de Δ_i . Ainsi, $|\text{niv}(\mathfrak{F}_\gamma(T))|$ est égal à $|\text{niv}(T)| + 1$ et $\mu = \gamma$ ou $\epsilon = \gamma$ dépendamment que $\text{niv}(T)$ soit positif ou négatif.

Inversement, ϵ ou μ , que nous notons ici ρ par souci d'uniformité, est n'importe lequel des $p(T)$ arcs (de type II ou III) à l'intérieur de $Q_{p(T)}^\bullet$. De un, chacun de ces arcs délimite deux triangles qui composent la triangulation de ce polygone. Leur union, bien entendu, forme un quadrilatère dont les quatre sommets sont la ponction et trois points sur la frontière de $Q_{p(T)}^\bullet$. Ce quadrilatère est illustré dans l'image de droite à la figure 8. De deux, ρ est la diagonale incidente à la ponction. Si nous la flippons, la diagonale obtenue lie deux points sur la frontière et ne contribue plus à la quantité $p(T)$. Conséquemment, $|\text{niv}(\mathfrak{F}_\rho(T))|$ est bien égal à $|\text{niv}(T)| - 1$.

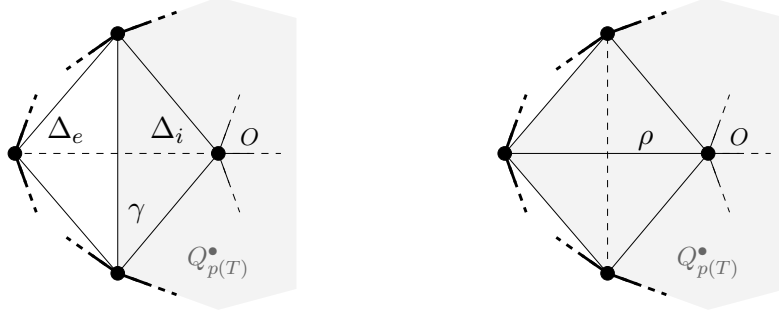


FIGURE 8 – Illustration et identification des arcs, triangles et quadrilatères impliqués dans le Cas 1 de la preuve du lemme 4.8. L’image de gauche représente une situation permettant de lier un arc de plus à la ponction. De même, l’image de droite représente une situation permettant de lier un arc de moins à la ponction. La zone grise identifie l’intérieur du polygone minimal $Q_{p(T)}^{\bullet}$ dans \mathbf{P}_n^{\bullet} qui délimite les $p(T)$ arcs incidents à la ponction O . Dans chaque quadrilatère, la diagonale pleine identifie γ ou ρ et la diagonale pointillée, son image par un flip.

Cas 2 : $|\text{niv}(T)| = 1$

Dans ce cas, $p(T) = 2$ et $|\delta(T)| = 1$. Ainsi, $Q_{p(T)}^{\bullet}$ est un digone et il délimite deux arcs de type II ou deux de type III. Si $n \geq 3$, alors $|\text{niv}(T)|$ peut croître à 2 et pour cela, nous devons flipper un arc γ parmi les deux formant la frontière du digone. Le raisonnement menant à cette conclusion est identique au cas précédent. Entre autres, bien que $Q_{p(T)}^{\bullet}$ puisse être délimité en partie par \mathbf{P}_n^{\bullet} , la condition $n \geq 3$ nous assure qu’au moins un de ces deux arcs est « flippable ».

Inversement, l’arc ρ dont le flip diminue $|\text{niv}(T)|$ à 0 est n’importe lequel des deux arcs à l’intérieur du digone. En effet, si nous flippons ρ , celui-ci est remplacé par un arc dont les extrémités sont celles du second arc, mais dont l’étiquette à la ponction diffère. Ces substitutions apparaissent dans $\mathbf{E}^{\bowtie}(\mathbf{P}_2^{\bullet})$, qui est illustré à la figure 5.

Cas 3 : $\text{niv}(T) = 0$

Dans ce cas, $p(T) = 2$ et $\delta(T) = 0$. Ainsi, $Q_{p(T)}^{\bullet}$ est un digone et il délimite un seul arc γ de type II et un seul arc γ_{\bowtie} de type III. De plus, puisque ces derniers sont compatibles, ils sont incidents au même point marqué C sur la frontière du digone. Notons par D l’autre point marqué sur la frontière. Si nous flippons γ_{\bowtie} , nous obtenons un second arc de type II, mais incident à D . Le niveau de la triangulation résultante est donc 1. De même, si nous flippons γ , nous obtenons un second arc de type III, mais incident à D ; le niveau diminue à -1 . Tout cela est également illustré à la figure 5. En somme, nous trouvons que $\mu = \gamma_{\bowtie}$ et $\epsilon = \gamma$. \square

L’erreur à ne pas commettre est d’affirmer qu’avec ce lemme, l’inégalité de la remarque 4.7 devient une égalité. Dans les faits, la distance entre deux triangu-

lations quelconques T_1 et T_2 de \mathbf{P}_n^\bullet n'est habituellement pas égale à la différence absolue $|d|$ de leur niveau. Au départ, si T_1 et T_2 sont du même niveau, mais distinctes, alors l'affirmation est fausse. Plus généralement, bien qu'il est vrai que $|d|$ flips suffisent pour passer de T_1 à une triangulation T dont le niveau est égal à $\text{niv}(T_2)$, rien ne garantit que $T = T_2$. Les flips du lemme 4.8 sont restreints en nombre et spécifiques dans leur fonction. Ainsi, au prix d'accomplir ce que nous voulons, ils ne nous rapprochent pas nécessairement de T_2 . Le graphe $\mathbf{E}^{\boxtimes}(\mathbf{P}_3^\bullet)$ à la figure 6 contient plusieurs exemples qui illustrent cela.

Cependant, la difficulté discutée ci-dessus disparaît pour les niveaux extrêmes $n-1$ et $-n+1$. Nous savons que ceux-ci regroupent les triangulations possédant respectivement n arcs de type II et n arcs de type III. Or, puisque toute triangulation de \mathbf{P}_n^\bullet possède n arcs, les triangulations de ces niveaux sont uniquement déterminées. Leur apparence particulière, un produit de l'absence d'arcs de type I, leur vaut la notation et les noms spéciaux suivants :

Définition 4.9. L'étoile « plain » est l'unique triangulation étiquetée E_p de \mathbf{P}_n^\bullet dont le niveau est $n-1$. De même, l'étoile « notched » est l'unique triangulation étiquetée E_n de \mathbf{P}_n^\bullet dont le niveau est $-n+1$.

La disposition des arcs de E_p et de E_n autour de la ponction est ce qui inspire leur appellation, car cette première rappelle une étoile. Les deux triangulations sont illustrées à la figure 9 afin de mettre cela en évidence.

En somme, si nous les faisons intervenir, l'inégalité de la remarque 4.7, à la lumière du lemme 4.8, devient une égalité. Elle prend plus spécifiquement l'une des deux formes suivantes :

Corollaire 4.10 (Lemme 4 de [CP14]). *Si T est une triangulation étiquetée de \mathbf{P}_n^\bullet , alors :*

$$d(T, E_p) = (n-1) - \text{niv}(T) \quad \text{et} \quad d(T, E_n) = (n-1) + \text{niv}(T). \quad \square$$

4.2 La résolution du diamètre de $\mathbf{EG}(D_n)$

Puisque le lemme 4 de [CP14], sous la forme du corollaire 4.10, a été présenté, nous pouvons maintenant entamer la preuve que $\text{diam}(D_n)$ est égal à $2n-2$ lorsque $n \geq 2$. Afin d'obtenir ce résultat, nous allons montrer que $2n-2$ est à la fois une borne inférieure et une borne supérieure pour le diamètre.

Commençons par la première qui est aussi la plus simple. Pour établir celle-ci, il faut trouver deux triangulations T_1 et T_2 de \mathbf{P}_n^\bullet qui maximisent la distance $d(T_1, T_2)$ dans $\mathbf{E}^{\boxtimes}(\mathbf{P}_n^\bullet)$. Intuitivement, les étoiles E_p et E_n sont de bonnes candidates, car elles s'opposent diamétralement sur le plan des niveaux. En fait, cette simple intuition nous mène à la borne suivante :

Proposition 4.11 (Lemme 3 de [CP14]). *Pour $n \geq 2$, $\text{diam}(D_n) \geq 2n-2$.*

Démonstration. En vertu de n'importe laquelle des deux égalités du corollaire 4.10, $d(E_p, E_n) = 2n-2$. Puisque $\text{diam}(D_n)$ correspond au maximum des distances dans $\mathbf{E}^{\boxtimes}(\mathbf{P}_n^\bullet)$, il suit de cette égalité que $\text{diam}(D_n) \geq 2n-2$. \square

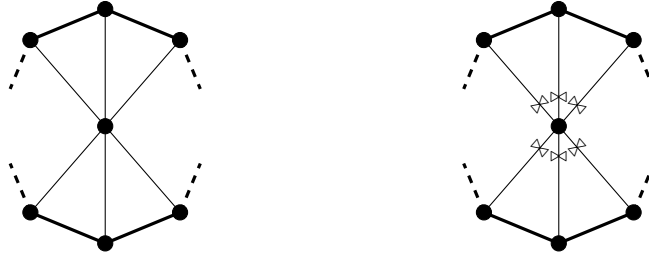


FIGURE 9 – Les deux triangulations résultant d’une utilisation exclusive d’arcs qui relient la frontière à la ponction. Celle de gauche contient uniquement des arcs de type II et celle de droite, uniquement des arcs de type III. Dans les deux cas, les triangles obtenus encerclent la ponction et la disposition des arcs rappelle une étoile. Lorsque le polygone correspond à \mathbf{P}_n^\bullet , la triangulation de gauche représente l’étoile « plain » E_p et celle de droite, l’étoile « notched » E_n .

Passons maintenant à la borne supérieure. Cette dernière est plus difficile à établir, car il faut montrer que la distance entre toute paire $\{T_1, T_2\}$ de triangulations de \mathbf{P}_n^\bullet est inférieure ou égale à $2n - 2$. D’une part, il suffit de prouver l’existence d’une suite de $2n - 2$ flips ou moins liant T_1 et T_2 . D’autre part, et parce que ces triangulations sont quelconques, l’élaboration de cette suite doit être menée dans un cadre général, d’où la difficulté de la tâche. Heureusement, les étoiles E_p et E_n apportent encore la solution.

Étant donnée E une étoile, la stratégie est de lier T_1 et T_2 avec deux suites optimales, c’est-à-dire de longueur minimale, passant par E . La première suite lie T_1 à E et la seconde, E à T_2 . Cette stratégie présente plusieurs avantages. Premièrement, la longueur d’une suite optimale entre une triangulation quelconque et E est « connue » grâce au corollaire 4.10. Deuxièmement, au prix d’un détour, nous bénéficions du fait qu’il est aisé de monter ou de descendre dans les niveaux et d’atteindre les niveaux extrêmes représentés par E_p et E_n . Finalement, puisque E admet deux possibilités, nous pouvons, dépendamment du contexte, préférer E_p ou E_n afin de minimiser les suites. Par exemple, si la moyenne de $\text{niv}(T_1)$ et de $\text{niv}(T_2)$ est positive, choisir E_p serait plus astucieux. De manière générale, plus E_p constitue un bon choix, plus E_n constitue un mauvais choix et vice versa. Ainsi, nous pouvons espérer qu’une des deux suites satisfasse la borne supérieure. Ces observations clés amènent au résultat suivant :

Proposition 4.12. *Pour $n \geq 2$, $\text{diam}(D_n) \leq 2n - 2$.*

Démonstration. Nous nous inspirons de la preuve du théorème 2 de [CP14]. Étant données deux triangulations T_1 et T_2 de \mathbf{P}_n^\bullet , considérons deux suites de flips liant ces dernières. La première, notée \mathcal{S}_p , consiste en une suite minimale de T_1 à E_p suivie d’une de E_p à T_2 . La seconde, notée \mathcal{S}_n , consiste en une suite minimale de T_1 à E_n suivie d’une de E_n à T_2 . Le nombre total de flips utilisés par celles-ci, que nous notons par $d(\mathcal{S}_p)$ et $d(\mathcal{S}_n)$, est égal à $d(T_1, E_p) + d(T_2, E_p)$ et $d(T_1, E_n) + d(T_2, E_n)$ respectivement. Par définition, ces nombres sont positifs.

En vertu du corollaire 4.10, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
 d(\mathcal{S}_p) + d(\mathcal{S}_n) &= \left(d(T_1, E_p) + d(T_2, E_p) \right) + \left(d(T_1, E_n) + d(T_2, E_n) \right) \\
 &= \left(d(T_1, E_p) + d(T_1, E_n) \right) + \left(d(T_2, E_p) + d(T_2, E_n) \right) \\
 &= \left((n-1) - \text{niv}(T_1) + (n-1) + \text{niv}(T_1) \right) + \\
 &\quad \left((n-1) - \text{niv}(T_2) + (n-1) + \text{niv}(T_2) \right) \\
 &= (2n-2) + (2n-2) \\
 &= 4n-4.
 \end{aligned}$$

Puisque $d(\mathcal{S}_p)$ et $d(\mathcal{S}_n)$ sont positifs, cette égalité implique qu'au moins un des deux est inférieur ou égal à $2n-2$, car sinon, la somme dépasserait $4n-4$. Par conséquent, $d(T_1, T_2) \leq 2n-2$ et ce pour une paire $\{T_1, T_2\}$ de triangulations quelconques de \mathbf{P}_n^\bullet . Nous concluons donc que $\text{diam}(D_n) \leq 2n-2$. \square

Au terme de notre démarche, nous sommes finalement en mesure d'énoncer, sous une forme plus complète, le théorème de [CP14] sur le diamètre de D_n .

Théorème 4.13 (Théorème 2 de [CP14]). *Le diamètre du graphe d'échange de l'algèbre amassée de type D_n est égal à 1 si $n = 1$ et à $2n-2$ si $n \geq 2$.*

Démonstration. Si $n = 1$, le graphe $\mathbf{EG}(D_1)$ est composé de deux sommets liés par une arête. Ces sommets sont les graines (X, Q) et (X', Q) où Q est le carquois à un seul sommet et sans flèches, $X = \{x_1\}$ et $X' = \{2/x_1\}$. Nous déduisons facilement que le diamètre de ce graphe est 1. Sinon, si $n \geq 2$, le résultat suit des propositions 4.11 et 4.12. \square

Références

- [Bou12] David BOULET-ST-JACQUES : Les algèbres amassées : Définitions de base et résultats. *Cahier de Mathématique de l'Université de Sherbrooke (CaMUS)*, 2:135–150, Avril 2012.
- [CP14] Cesar CEBALLOS et Vincent PILAUD : The diameter of type D associahedra and the non-leaving-face property. arXiv : 1406.0368v1 [math.CO], Juin 2014.
- [Dou12] Guillaume DOUVILLE : Triangulations, carquois et théorème de Ptolémée. *Cahier de Mathématique de l'Université de Sherbrooke (CaMUS)*, 2:59–77, Avril 2012.
- [FST08] Sergey FOMIN, Michael SHAPIRO et Dylan THURSTON : Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I : Cluster complexes. *Acta Mathematica*, 201(1):83–146, Septembre 2008.

- [FZ02] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Cluster algebras I : Foundations. *Journal of the American Mathematical Society*, 15(2):497–529, Avril 2002.
- [FZ03a] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Cluster algebras II : Finite type classification. *Inventiones mathematicae*, 154(1):63–121, Octobre 2003.
- [FZ03b] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Y-systems and generalized associahedra. *Annals of Mathematics*, 158(3):977–1018, Novembre 2003.
- [Ngu07] Bertrand NGUEFACK : Introduction aux Algèbres amassées : Définitions et exemples. Rapport de recherche 2007-41, Département de mathématiques de l'Université de Sherbrooke, Janvier 2007.
- [Pou14] Lionel POURNIN : The diameter of associahedra. *Advances in Mathematics*, 259:13–42, Juillet 2014. Première version publiée sur arXiv en juillet 2012.
- [STT88] Daniel D. SLEATOR, Robert E. TARJAN et William P. THURSTON : Rotation distance, triangulations, and hyperbolic geometry. *Journal of the American Mathematical Society*, 1(3):647–681, Juillet 1988.

YANNICK LEBRUN
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: Yannick.Lebrun@USherbrooke.ca