

# Quadrilatères et pentagones dans le graphe d'échange

Catherine Masson et Jean-Philippe Morissette

**RÉSUMÉ** Les mutations successives faites sur un carquois  $Q$  sont régies par certaines relations. Dans cet article, on démontre deux de ces relations tout en donnant une application à l'étude des graphes d'échanges.

## 1 Introduction

La théorie des algèbres amassées a été introduite par Fomin et Zelevinsky au début du 21<sup>e</sup> siècle [FZ01]. Une algèbre amassée est un anneau de polynômes à coefficients entiers sur un ensemble de variables, dites amassées, que l'on obtient successivement à partir d'un ensemble de  $n$  variables initiales et d'un carquois, en appliquant un processus récursif appelé mutation. Un carquois est un quadruplet représenté par des flèches, des points et deux fonctions associant à chaque flèche deux points, appelés sa source et son but. La mutation en un point  $i$  transforme un carquois en un autre, elle sera notée  $\mu_{x_i}$ , où  $x_i$  est une indéterminée. De plus, on définit une graine comme étant une paire formée d'un carquois et d'un amas associé, ce dernier étant un ensemble d'indéterminées. Il est possible de regrouper les mutations reliées à un carquois  $Q$  dans un polyèdre qui est associé à un graphe, appelé graphe d'échange [BDP12]. Le graphe d'échange est obtenu comme suit : chaque sommet est une graine reliée à la graine initiale par mutations successives et il existe une arête entre deux sommets si on peut passer de l'un à l'autre par le biais d'une seule mutation. L'étude d'un graphe d'échange requiert le calcul des graines obtenues par mutations à partir d'une graine de départ, ce qui est un processus difficile. Cet article est principalement consacré à la démonstration d'un théorème permettant de faciliter l'étude des graphes d'échange et de réduire les calculs mentionnés auparavant.

**Théorème 1.1.** *Soit  $Q$  un carquois et  $i, j$  deux points de  $Q$ .*

- (a) *S'il n'existe aucune flèche entre  $i$  et  $j$ , alors  $\mu_i\mu_j(Q) = \mu_j\mu_i(Q)$ .*
- (b) *S'il existe une unique flèche ayant comme source le point  $i$  et comme but le point  $j$ , alors  $\mu_j\mu_i(Q)$  est isomorphe à  $\mu_j\mu_i\mu_j(Q)$ .*

---

Les auteurs souhaitent remercier le CRSNG pour son financement et également remercier Ibrahim Assem, Thomas Brüstle et Vasilisa Shramchenko pour la supervision de cet article.

La relation (a) permet d'établir l'existence d'un quadrilatère dans le graphe d'échange dont ses sommets sont les graines correspondant aux carquois  $Q$ ,  $\mu_i(Q)$ ,  $\mu_j(Q)$  et  $\mu_i\mu_j(Q)$  lorsqu'il n'y a aucune flèche entre deux points de  $Q$ . La relation (b) permet d'établir l'existence d'un pentagone dans le graphe d'échange dont ses sommets sont les graines correspondant aux carquois  $Q$ ,  $\mu_i(Q)$ ,  $\mu_j(Q)$ ,  $\mu_i\mu_j(Q)$  et  $\mu_j\mu_i\mu_j(Q)$  lorsqu'il existe exactement une flèche entre deux points de  $Q$ .

Cet article est organisé comme suit. La section 2 porte sur des définitions utiles pour la démonstration du théorème principal, celui-ci sera présenté dans la section 3. La section 4 est consacrée à l'application du théorème à l'étude du graphe d'échange.

## 2 Définitions

### 2.1 Carquois et mutations

**Définition 2.1.** On appelle *carquois* un quadruplet  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  formé de deux ensembles  $Q_0, Q_1$  et de deux fonctions  $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ . Les éléments de  $Q_0$  sont appelés des *points* tandis que les éléments de  $Q_1$  sont appelés des *flèches*. Soit  $\alpha$  une flèche, alors  $s(\alpha)$  est appelée la *source* de  $\alpha$  et  $t(\alpha)$  est appelé son *but*.

**Exemple 2.2.**

$$Q = \quad 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

Dans cet exemple, le carquois  $Q$  est formé de  $Q_0 = \{1, 2, 3\}$  et  $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$ . De plus, on a que  $t(\alpha) = 2 = s(\beta)$ ,  $s(\alpha) = 1$  et  $t(\beta) = 3$ .

*Notation 2.3.* Dans cet article, lorsqu'on parle du nombre de flèches entre deux points  $k$  et  $l$ , on note ce nombre à l'aide de l'alphabet latin, tandis que lorsqu'on parle de l'étiquette que l'on attribue à une flèche entre  $k$  et  $l$ , on note celle-ci à l'aide de lettres grecques.

Nous définissons maintenant la notion de mutation.

*Remarque 2.4.* Afin de pouvoir effectuer une mutation sur un carquois, ce dernier ne doit avoir ni boucles ni cycles orientés de longueur deux. Dans cet article, on se restreint donc aux carquois n'ayant ni boucles ni cycles de longueur deux.

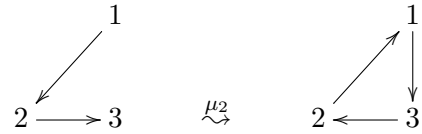
**Définition 2.5.** Soit  $Q$  un carquois sans boucles ni cycles de longueur deux.

On appelle *mutation* au point  $k$ , notée  $\mu_k$ , l'opération qui définit le carquois  $Q' = \mu_k(Q)$  à partir de  $Q$ , au moyen des règles suivantes :

1. Pour chaque chemin de longueur deux  $i \rightarrow k \rightarrow j$  dans  $Q$  passant par  $k$ , ajouter une flèche  $i \rightarrow j$  dans  $\mu_k(Q)$ .
2. Inverser, dans  $\mu_k(Q)$ , le sens de toutes les flèches incidentes à  $k$ .

- Si deux flèches forment un cycle orienté de longueur deux dans le carquois obtenu de  $Q$  suite aux deux premières règles, les effacer du carquois.

**Exemple 2.6.**



Dans cet exemple, nous avons muté au point 2. Noter que dans cet exemple, on n'a pas créé de cycle de longueur deux, donc, on n'a pas eu besoin d'appliquer la règle 3.

**2.2 Isomorphisme de carquois**

**Définition 2.7.** Un *morphisme* de carquois  $f : Q \rightarrow Q'$  est une paire d'applications  $f = (f_0, f_1)$  avec  $f_0 : Q_0 \rightarrow Q'_0, f_1 : Q_1 \rightarrow Q'_1$  tels que  $s' \circ f_1 = f_0 \circ s$  et  $t' \circ f_1 = f_0 \circ t$ . Un *isomorphisme* de carquois est un morphisme bijectif. On note  $Q \cong Q'$  lorsque  $Q$  et  $Q'$  sont isomorphes.

**Exemple 2.8.**

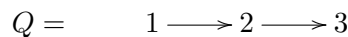


Les carquois  $Q$  et  $Q'$  sont isomorphes puisqu'on peut associer leurs points ainsi :  $1 \mapsto c, 2 \mapsto a, 3 \mapsto d$  et  $4 \mapsto b$  et leurs flèches de façon évidente. Notez que dans un carquois n'ayant pas de flèches multiples, la donnée de  $f_0$  détermine  $f_1$  uniquement.

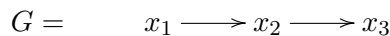
**2.3 Graines**

**Définition 2.9.** Une *graine* est une paire  $G = (Q, X)$  où  $Q$  est un carquois ayant  $n$  points et  $X$  est un ensemble de  $n$  indéterminées, appelé *amas*, en bijection avec les points de  $Q$ .

**Exemple 2.10.** Soit l'amas  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  et le carquois suivant :



alors, la graine  $G = (Q, X)$  peut être représentée de la façon suivante :



### 3 Relation des mutations de carquois

**Proposition 3.1.** *Soit un carquois  $Q$  et  $i, j \in Q_0$  tels qu'il n'y ait aucune flèche entre les deux points  $i$  et  $j$ . Alors, on a la relation suivante :  $\mu_j\mu_i(Q) = \mu_i\mu_j(Q)$ .*

*Démonstration.* Pour cette démonstration, nous allons vérifier la commutativité des mutations  $\mu_i$  et  $\mu_j$  pour les trois règles de mutations (voir la définition 2.5).

Pour la première étape de la mutation, supposons que l'on a un chemin  $a \rightarrow i \rightarrow b$  et un chemin  $c \rightarrow j \rightarrow d$  dans le carquois  $Q$ . Alors, la mutation  $\mu_i$  ajoute la flèche  $a \rightarrow b$  au carquois sans modifier les flèches incidentes à  $j$ . Par la suite, la mutation  $\mu_j$  ajoute la flèche  $c \rightarrow d$  sans modifier les flèches incidentes à  $i$ . Si l'on décide plutôt de commencer par la mutation  $\mu_j$ , une flèche  $c \rightarrow d$  sera ajoutée. Par la suite, la mutation  $\mu_i$  ajoutera une flèche  $a \rightarrow b$ . Dans un cas comme dans l'autre, le résultat est le même : l'ajout des flèches  $a \rightarrow b$  et  $c \rightarrow d$ .

Comme la troisième règle de mutation, effacer les cycles orientés de longueur deux, est dépendante de la création de nouvelles flèches et que la première étape est indépendante de l'ordre des mutations, alors la troisième l'est tout autant.

Pour la deuxième étape de la mutation, inverser le sens des flèches incidentes à  $i$  ou à  $j$  selon la mutation effectuée, la mutation  $\mu_i$  change tout d'abord le sens des flèches incidentes à  $i$ , ce qui n'affecte pas les flèches incidentes à  $j$ . Par la suite, la mutation  $\mu_j$  change le sens des flèches incidentes à  $j$ , ce qui n'affecte pas les flèches incidentes à  $i$ . Si l'on commence plutôt par la mutation  $\mu_j$ , on change le sens des flèches incidentes à  $j$ . Ensuite, la mutation  $\mu_i$  change le sens des flèches incidentes à  $i$ . Dans un cas comme dans l'autre, le résultat est le même : toutes les flèches incidentes à  $i$  et à  $j$  sont changées de sens exactement une fois.  $\square$

**Théorème 3.2.** *Soit un carquois  $Q$  et  $i, j \in Q_0$  tels qu'il y ait une unique flèche  $i \rightarrow j$ . Alors, on a la relation suivante :  $\mu_j\mu_i(Q) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(Q)$ .*

*Plus précisément, les deux carquois coïncident à permutation des points  $i$  et  $j$  près.*

#### 3.1 Démonstration du théorème 3.2

On note, pour faciliter l'écriture dans la démonstration du théorème,  $t_k$  les carquois obtenus par mutations successives sur  $Q$ , au lieu de  $\mu(Q)$ . Pour la démonstration, chacun de ces carquois est associé à l'amas initial  $X$  de la graine  $G = (Q, X)$ , même si le carquois a muté.

Nous pouvons maintenant introduire deux monômes remarquables, mais tout d'abord une définition.

**Définition 3.3.** L'anneau de polynômes  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  est l'ensemble de polynômes à coefficients entiers sur les indéterminées  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

**Définition 3.4.** Les monômes  $M_i(t)$  et  $W_i(t)$  appartiennent à l'anneau de polynômes  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ , où  $\{x_1, \dots, x_n\}$  sont les éléments de l'amas initial  $X$  de  $G = (Q, X)$  et où  $t$  est un carquois obtenu par mutations successives sur  $Q$ .

De plus, on associe le point  $i$  de  $Q$  à la variable  $x_i$ . Soit  $i$  un des points de  $Q$ , on note  $\{i_1, \dots, i_{p_i}\}$  l'ensemble des prédécesseurs immédiats du point  $i$  dans  $t$ , et  $\{j_1, \dots, j_{q_i}\}$  l'ensemble de ses successeurs immédiats. On convient que pour tout  $1 \leq k \leq p_i$ , il existe  $m_k$  flèches de  $i_k$  vers  $i$ , et pour tout  $1 \leq l \leq q_i$ , il existe  $n_l$  flèches de  $i$  vers  $j_l$ . Alors on pose

$$M_i(t) = \prod_{k=1}^{p_i} x_k^{m_k}$$

et

$$W_i(t) = \prod_{l=1}^{q_i} x_l^{n_l}.$$

Ainsi,  $M_i(t)$  est le monôme représentant le produit de toutes les variables associées aux flèches entrant dans  $i$  pour le carquois  $t$ , où les variables sont les variables de l'amas initial, c'est-à-dire que les variables ne changent pas suite aux mutations. De même,  $W_i(t)$  est le monôme représentant le produit de toutes les variables associées aux flèches sortant de  $i$  pour le carquois  $t$ . Ces deux monômes nous permettent donc de connaître les flèches incidentes à un point. Si on connaît tous les monômes associés à chacun des points, il est alors possible de reconstruire le carquois, car nous avons toutes les informations nécessaires (modulo les permutations des flèches ayant le même but et la même source). Cette notation a été inspirée par celle utilisée par Fomin et Zelevinsky dans [FZ01].

**Exemple 3.5.** Soit  $G = (t_1, X)$  une graine avec  $m, n, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

$$G = \begin{array}{ccc} & x_p & x_q \\ & \downarrow m & \swarrow n \\ & x_i & \xrightarrow{s} x_r \end{array}$$

Dans cet exemple  $M_i(t_1) = x_p^m x_q^n$  et  $W_i(t_1) = x_r^s$ .

Par abus de langage, on dit *les flèches*  $M_i(t)$  et non pas les variables dans  $M_i(t)$ .

Pour les besoins de la démonstration, on pose  $t_1 = Q$ .

On peut définir successivement les carquois suivants

$$\begin{aligned} t_2 &= \mu_j(Q) \\ t_3 &= \mu_i \mu_j(Q) \\ t_4 &= \mu_j \mu_i \mu_j(Q) \\ t_5 &= \mu_i(Q) \\ t_6 &= \mu_j \mu_i(Q). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
t_2 = \mu_j(Q) \xrightarrow{\mu_i} t_3 = \mu_i \mu_j(Q) \xrightarrow{\mu_j} t_4 = \mu_j \mu_i \mu_j(Q) \\
\swarrow^{\mu_j} \\
t_1 = Q \\
\searrow_{\mu_i} \\
t_5 = \mu_i(Q) \xrightarrow{\mu_j} t_6 = \mu_j \mu_i(Q)
\end{array}$$

Les carquois que nous venons d'énumérer sont représentés dans le diagramme suivant.

Il ne faut pas oublier que tous ces carquois sont reliés à l'amas initial  $X$  de la graine  $G = (Q, X)$ .

La démonstration du théorème 3.2 se fera en deux étapes : nous allons d'abord comparer les flèches incidentes aux points  $i$  et  $j$  de deux carquois et les flèches incidentes aux autres points par la suite.

**(a) Première partie de la preuve : les flèches incidentes aux points  $i$  et  $j$ .**

Dans cette première partie, nous nous concentrons sur deux points  $i, j \in Q_0$  tels qu'il existe une unique flèche  $i \rightarrow j$  dans  $Q$ . Le but est de démontrer que pour toute flèche  $k \rightarrow i$  (resp.  $i \rightarrow k$ ) dans  $\mu_j \mu_i(Q)$ , il y a une flèche  $k \rightarrow j$  (resp.  $j \rightarrow k$ ) dans  $\mu_j \mu_i \mu_j(Q)$  et que pour toute flèche  $k \rightarrow j$  (resp.  $j \rightarrow k$ ) dans  $\mu_j \mu_i(Q)$ , il y a une flèche  $k \rightarrow i$  (resp.  $i \rightarrow k$ ) dans  $\mu_j \mu_i \mu_j(Q)$ . Pour cela, nous démontrons que les flèches entrantes et sortantes de  $i$  dans l'un des deux carquois correspondent respectivement aux flèches entrantes et sortantes de  $j$  dans l'autre carquois.

Afin de démontrer ces égalités, nous exprimons les flèches entrantes et sortantes de  $i$  et  $j$  dans les carquois  $\mu_j \mu_i(Q)$  et  $\mu_j \mu_i \mu_j(Q)$  en fonction du carquois  $Q$  initial. Nous utilisons donc les monômes  $M_k(t)$  et  $W_k(t)$ .

*Notation 3.6.* Soit  $\alpha$  une flèche d'un carquois ayant  $k$  comme source et  $l$  comme but. On note  $\alpha'$  une flèche ayant  $l$  comme source et  $k$  comme but.

*Remarque 3.7.* Comme on n'étudie pas la flèche entre  $i$  et  $j$  dans cette section, on ne met pas les variables  $x_i$  et  $x_j$  dans les monômes  $M_k(t)$  et  $W_k(t)$ .

$$\text{On note donc } M_k(t)' = M_k(t) \Big|_{x_i=x_j=1} \text{ et } W_k(t)' = W_k(t) \Big|_{x_i=x_j=1}$$

**Lemme 3.8.**  $M_j(t_4)' = M_i(t_6)' = M_j(t_1)' \cdot W_i(t_1)'$ .

*Démonstration.* La preuve se fait en deux étapes.

(a) On veut montrer que  $M_j(t_4)' = M_j(t_1)' \cdot W_i(t_1)'$ .

On commence par montrer que les flèches entrantes en  $j$  dans  $t_1$  ne disparaissent pas du carquois quand on applique la suite de mutations  $\mu_j \mu_i \mu_j$ .

En effet, lors de la première et de la troisième mutation, on mute en  $j$ , donc on inverse le sens des flèches incidentes à  $j$  à deux reprises, sans créer ni

effacer de nouvelles flèches incidentes à  $j$ . Le nombre de flèches entrantes dans  $j$  ne varie donc pas pour ces mutations.

Supposons que lors de la seconde mutation,  $\mu_i$ , on ait effacé une des flèches entrantes en  $j$  dans  $t_1$ , disons  $k \rightarrow j$ . Puisque cette flèche devient  $\alpha : j \rightarrow k$  dans  $t_2$ , il faut que  $t_2$  contienne un chemin de longueur deux  $k \rightarrow i \rightarrow j$  et cela est impossible, parce que  $t_2$  contient la flèche  $j \rightarrow i$ . (Voir Figure 1)

Ainsi, toutes les flèches entrant en  $j$  dans  $t_1$  sont entrantes en  $j$  dans  $t_4$ .

En termes de monômes cela veut dire que  $M_j(t_1)'$  divise  $M_j(t_4)'$ .

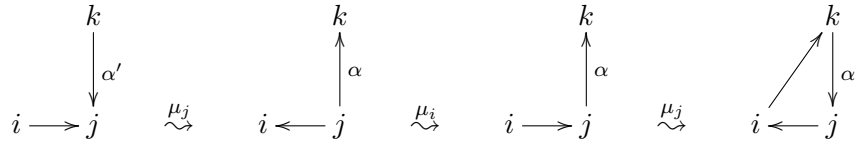


FIGURE 1 – Le comportement d’une flèche de  $M_j(t_1)$  suite aux mutations  $\mu_j\mu_i\mu_j$ .

Il reste à montrer que les flèches entrant en  $j$  dans  $t_4$  ne provenant pas des flèches entrant en  $j$  dans  $t_1$  sont des flèches provenant de  $W_i(t_1)'$ .

En effet, il est possible d’avoir des chemins de longueur deux  $j \rightarrow i \rightarrow k$  dans  $t_2$  qui crée des flèches  $\beta : j \rightarrow k$  dans  $t_3$  (qui deviendront  $k \rightarrow j$  dans  $t_4$ ). Il suffit donc de s’intéresser aux flèches  $\alpha : i \rightarrow k$  dans  $t_2$ . Ces flèches correspondent aux flèches provenant de  $W_i(t_1)'$ , plus les flèches sortant de  $i$  créées lors de la première mutation,  $\mu_j$ , par des chemins de longueur deux  $i \rightarrow j \rightarrow k$ . Or, les flèches sortant de  $i$  créées lors de la première mutation ne font qu’éliminer lors de  $\mu_i$  la flèche  $j \rightarrow k$  qui les a créées. (Voir Figure 2)

En termes de monômes cela veut dire que  $W_i(t_1)'$  divise  $M_j(t_4)'$ .

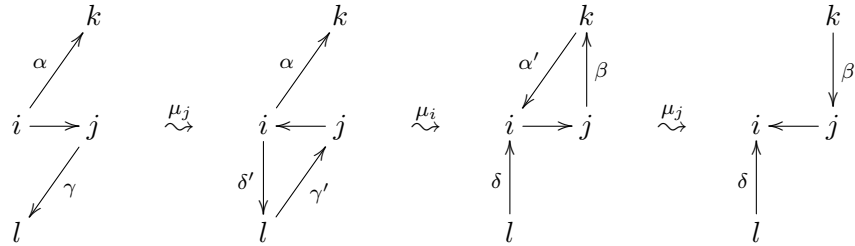


FIGURE 2 – Le comportement des flèches provenant de  $W_j(t_1)$  et de  $W_i(t_1)$  suite aux mutations  $\mu_j\mu_i\mu_j$ .

(b) On veut montrer que  $M_i(t_6)' = M_j(t_1)' \cdot W_i(t_1)'$ .

On commence par montrer que les flèches sortant de  $i$  dans  $t_1$  ne disparaissent pas du carquois quand on applique la suite de mutations  $\mu_j\mu_i$ .

En effet, lors de la première mutation, on mute en  $i$ , on inverse donc le sens des flèches incidentes à  $i$ , sans créer ni effacer de nouvelles flèches. Toutes les flèches  $i \rightarrow k$  dans  $t_1$  deviennent entrantes en  $i$  dans  $t_5$ .

Supposons maintenant que lors de la seconde mutation  $\mu_j$ , on ait effacé une des flèches sortantes de  $i$  dans  $t_1$ , disons  $i \rightarrow k$ . Comme cette flèche devient  $k \rightarrow i$  dans  $t_5$ , il faut que  $t_5$  contienne un chemin de longueur deux  $i \rightarrow j \rightarrow k$  et cela est impossible, parce que  $t_5$  contient la flèche  $j \rightarrow i$ .

Donc toutes les flèches sortantes de  $i$  dans  $t_1$  deviennent entrantes en  $i$  dans  $t_6$ .

Il reste à montrer que les flèches entrantes en  $i$  dans  $t_6$  ne provenant pas des flèches sortantes de  $i$  dans  $t_1$  sont des flèches provenant de  $M_j(t_1)'$ .

En effet, il est possible de créer des flèches  $\beta : k \rightarrow i$  dans  $t_6$  avec un chemin de longueur deux  $k \rightarrow j \rightarrow i$  dans  $t_5$ , puisque  $t_5$  contient la flèche  $j \rightarrow i$ . On s'intéresse donc aux flèches  $k \rightarrow j$  dans  $t_5$ , qui correspondent aux flèches  $k \rightarrow j$  dans  $t_1$ , soit les flèches provenant de  $M_j(t_1)'$ , plus les flèches entrant en  $j$  créées lors de la première mutation,  $\mu_i$  dans  $t_5$ . Or, les flèches entrant en  $j$  créées lors de la première mutation ne font qu'éliminer la flèche  $k \rightarrow i$  de  $t_1$  devenue  $i \rightarrow k$  dans  $t_5$  qui les a créées puisqu'il y a un chemin de longueur deux  $k \rightarrow j \rightarrow i$  dans  $t_5$ . Ainsi, les flèches entrant en  $j$  créées lors de la première mutation ne créent pas de flèches  $k \rightarrow i$  dans  $t_6$ . (Voir Figure 3)

Il suffit alors de montrer que les flèches de  $M_j(t_1)'$  ne peuvent pas disparaître lors de la première mutation.

Supposons que lors de la première mutation,  $\mu_i$ , on ait effacé une des flèches entrant en  $j$  dans  $t_1$ , disons  $\alpha : k \rightarrow j$ . Il faut donc que  $t_1$  contienne un chemin de longueur deux  $j \rightarrow i \rightarrow k$  et cela est impossible, parce que  $t_1$  contient la flèche  $i \rightarrow j$ . (Voir Figure 3)

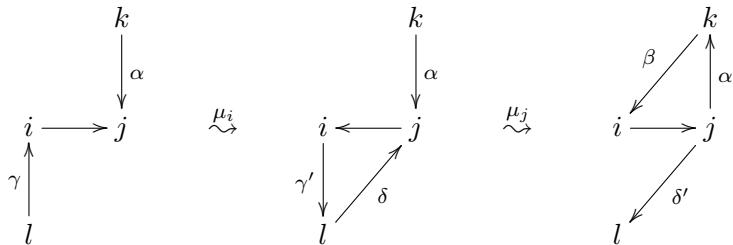


FIGURE 3 – Le comportement des flèches provenant de  $M_j(t_1)$  et de  $M_i(t_1)$  suite aux mutations  $\mu_j\mu_i$ .



□

Nous avons besoin de la notion suivante pour continuer la démonstration.

**Définition 3.9.** Soit  $Q$  un carquois,  $x, y, z \in Q_0$  et  $\alpha : z \rightarrow x$ ,  $\beta : y \rightarrow z$ .

Un ensemble  $E_{(x,y)} \subseteq Q_1 \times Q_1$  est dit *fidèle* s'il vérifie les conditions suivantes :

- a)  $(\alpha, \beta) \in E_{(x,y)}$  et  $\lambda \neq \beta, \lambda : y \rightarrow z$  impliquent  $(\alpha, \lambda) \notin E_{(x,y)}$
- b)  $(\alpha, \beta) \in E_{(x,y)}$  et  $\gamma \neq \alpha, \gamma : z \rightarrow x$  impliquent  $(\gamma, \beta) \notin E_{(x,y)}$ .

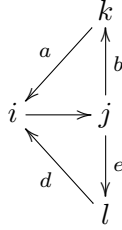
Un élément de  $E_{(x,y)}$  est alors appelé un *couple fidèle*.

Le monôme  $\text{CouF}_{(x,y)}(Q)$  associé au carquois  $Q$  est le produit de toutes les variables  $x_z$  associées aux points médians par tous les couples fidèles présents dans l'ensemble  $E_{(x,y)}$  associé au carquois  $Q$ .

*Remarque 3.10.* Une autre façon de voir les termes du monôme  $\text{CouF}_{(x,y)}(Q)$  est de considérer le minimum entre  $a$  et  $b$ , où  $a$  est le nombre de flèches  $\alpha : z \rightarrow x$  et  $b$  est le nombre de flèches  $\beta : y \rightarrow z$ .

Alors, si  $c = \min(a, b)$  on a que  $\text{CouF}_{(x,y)}(Q) = x_z^c$ .

**Exemple 3.11.** Soit  $Q$  le carquois suivant



Si l'on pose  $c = \min(a, b)$  et  $h = \min(d, e)$  alors

$$\text{CouF}_{(i,j)}(Q) = x_k^c \cdot x_l^h.$$

**Lemme 3.12.**  $W_j(t_4)' = W_i(t_6)' = \text{CouF}_{(i,j)}(t_1)$ .

*Démonstration.* La preuve se fait en deux étapes.

- (a) On veut montrer que  $W_j(t_4)' = \text{CouF}_{(i,j)}(t_1)$ .

On commence par montrer qu'on ne peut pas créer de flèches  $j \rightarrow k$  en appliquant la suite de mutations  $\mu_j \mu_i \mu_j$  à  $t_1$ .

En effet, lors de la première et de la troisième mutation, on mute en  $j$ , et on inverse donc le sens des flèches incidentes à  $j$  à deux reprises, sans créer ni effacer de nouvelles flèches. Le nombre de flèches entrantes en  $j$  ne varie donc pas pour ces mutations.

Supposons que lors de la seconde mutation  $\mu_i$ , on ait créé une flèche entrant dans  $j$  en  $t_3$ , disons  $k \rightarrow j$ , qui deviendra sortante en  $j$  dans  $t_4$ , disons

$j \rightarrow k$ . Il faut donc que  $t_2$  contienne un chemin de longueur deux  $k \rightarrow i \rightarrow j$  et cela est impossible, parce que  $t_2$  contient la flèche  $j \rightarrow i$ .

Il reste à montrer que toutes les flèches sortant de  $j$  dans  $t_4$  proviennent d'un couple fidèle en  $t_1$ .

Comme on s'intéresse aux flèches sortant de  $j$  dans  $t_4$  et que l'on mute deux fois en  $j$ , il suffit de porter notre regard sur  $W_j(t_1)'$  et de regarder lesquelles de ces flèches sont présentes à la fin. On peut remarquer rapidement qu'une flèche  $\alpha : j \rightarrow k$  dans  $t_1$  va s'éliminer après les trois mutations que l'on effectue. En effet, celle-ci, après la première mutation ( $\mu_j$ ), crée une flèche  $\beta : i \rightarrow k$  et, par le fait même, un chemin de longueur deux  $j \rightarrow i \rightarrow k$  qui va éliminer la flèche  $\alpha' : k \rightarrow j$  dans  $t_2$ . (Voir Figure 4)

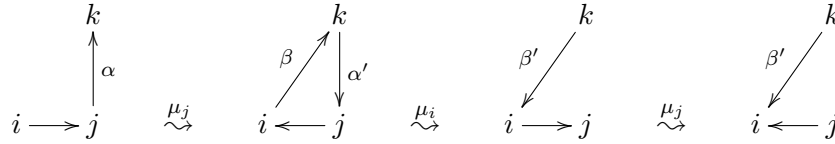


FIGURE 4 – Le comportement d'une flèche de  $W_j(t_1)$  suite aux mutations  $\mu_j\mu_i\mu_j$ .

La seule façon d'empêcher la flèche  $\beta$  de faire disparaître la flèche  $\alpha'$  est d'avoir une flèche  $\gamma : k \rightarrow i$  dans  $t_1$  qui empêchera la création de  $\beta$ . On peut remarquer que les flèches  $\alpha$  et  $\gamma$  forment un couple fidèle et donc seule la présence d'un couple fidèle à qui  $\alpha$  appartient dans  $t_1$  permet d'avoir une flèche  $j \rightarrow k$  dans  $t_4$ .

(b) On veut montrer que  $W_i(t_6)' = \text{CouF}_{(i,j)}(t_1)$ .

On commence par montrer qu'on ne peut pas créer de flèches  $i \rightarrow k$  en appliquant la suite de mutations  $\mu_j\mu_i$  à  $t_1$ .

En effet, lors de la première mutation, on mute en  $i$ , on inverse donc le sens des flèches incidentes à  $i$ , sans créer ni effacer de nouvelles flèches. Le nombre de flèches incidentes à  $i$  ne varie donc pas pour cette mutation.

Supposons que lors de la deuxième mutation,  $\mu_j$ , on ait créé une flèche sortant de  $i$  en  $t_6$ , disons  $i \rightarrow k$ . Il faut donc que  $t_5$  contienne un chemin de longueur deux  $i \rightarrow j \rightarrow k$  et cela est impossible, parce que  $t_5$  contient la flèche  $j \rightarrow i$ .

Il reste donc à montrer que toutes les flèches sortant de  $i$  dans  $t_6$  proviennent d'un couple fidèle en  $t_1$ .

Comme on s'intéresse cette fois aux flèches sortant de  $i$  dans  $t_6$  et que l'on mute une seule fois en  $i$ , il suffit de porter notre regard sur les flèches de  $M_i(t_1)'$  et de regarder lesquelles de ces flèches sont présentes à la fin. On remarque rapidement qu'une flèche  $\alpha : k \rightarrow i$  dans  $t_1$  va s'éliminer

après les deux mutations  $(\mu_j\mu_i)$  que l'on effectue. En effet, celle-ci, après la première mutation, crée une flèche  $\beta : k \rightarrow j$  dans  $t_5$  et, par le fait même, un chemin de longueur deux passant par  $j$  qui éliminera la flèche  $\alpha' : i \rightarrow k$ . (Voir Figure 5)

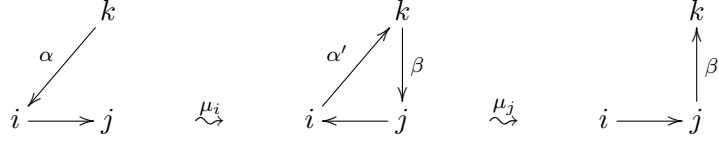


FIGURE 5 – Le comportement d'une flèche de  $M_j(t_1)$  suite aux mutations  $\mu_j\mu_i$ .

La seule façon d'empêcher la flèche  $\beta$  de faire disparaître la flèche  $\alpha$  est d'avoir une flèche  $\gamma : j \rightarrow k$  dans  $t_1$  qui empêchera l'apparition de  $\beta$ . On peut remarquer que les flèches  $\alpha$  et  $\gamma$  forment un couple fidèle et donc seule la présence d'un couple fidèle à qui  $\alpha$  appartient dans  $t_1$  permet d'avoir une flèche  $i \rightarrow k$  dans  $t_6$ .

□

**Lemme 3.13.**  $M_i(t_4)' = M_j(t_6)' = \frac{W_j(t_1)'}{\text{CouF}_{(i,j)}(t_1)}$ .

*Démonstration.* La preuve se fait en deux étapes.

(a) On prouve d'abord que  $M_i(t_4)' = \frac{W_j(t_1)'}{\text{CouF}_{(i,j)}(t_1)}$ .

On commence par montrer que les flèches de  $W_i(t_1)'$  ne peuvent pas devenir des flèches entrant en  $i$  dans  $t_4$  lorsqu'il y a absence de flèches  $j \rightarrow k$  dans  $t_1$ . (La présence des flèches  $j \rightarrow k$  est considérée plus bas)

Supposons que lors de la première mutation,  $\mu_j$ , on ait effacé une des flèches sortant de  $i$  dans  $t_1$ , disons  $i \rightarrow k$ . Il faut donc que  $t_1$  contienne un chemin de longueur deux  $k \rightarrow j \rightarrow i$  et cela est impossible, parce que  $t_1$  contient la flèche  $i \rightarrow j$ . Alors, toutes les flèches de  $W_i(t_1)$  restent sortant de  $i$  dans  $t_2$ .

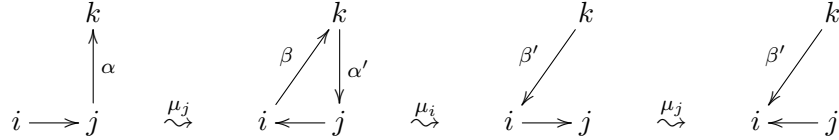
Lors de la deuxième mutation, on mute en  $i$ , alors toutes les flèches sortant de  $i$  dans  $t_1$  deviennent entrantes et chaque flèche  $\alpha : i \rightarrow k$  engendre une autre flèche  $\beta : j \rightarrow k$  car il y a nécessairement un chemin de longueur deux  $j \rightarrow i \rightarrow k$  dans  $t_2$ . (Voir Figure 6)

Dans  $t_3$ , on a les flèches  $\alpha' : k \rightarrow i$  et  $\beta : j \rightarrow k$ . Comme  $t_3$  contient la flèche  $i \rightarrow j$ , on a un chemin de longueur deux  $i \rightarrow j \rightarrow k$  qui va engendrer, suite à la troisième mutation  $(\mu_j)$ , une flèche  $\gamma : i \rightarrow k$  qui éliminera  $\alpha'$ . (Voir Figure 6)

Il faut ensuite montrer que les flèches de  $W_j(t_1)'$  peuvent créer des flèches entrant en  $i$  dans  $t_4$ .

FIGURE 6 – Le comportement d'une flèche de  $W_i(t_1)$  suite aux mutations  $\mu_j\mu_i\mu_j$ .

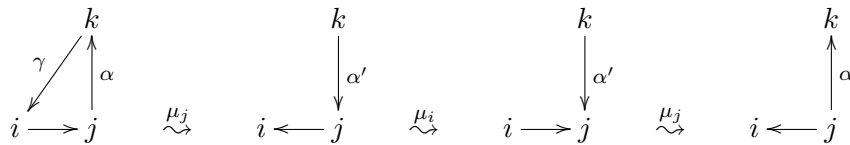
Les flèches de  $W_j(t_1)'$ ,  $\alpha : j \rightarrow k$ , créent des flèches entrant en  $i$  dans  $t_4$  en l'absence de flèches  $k \rightarrow i$  dans  $t_1$ . En effet, lors de la première mutation ( $\mu_j$ ), on crée une flèche sortant de  $i$ ,  $\beta : i \rightarrow k$ , qui deviendra entrante en  $i$  après la deuxième mutation ( $\mu_i$ ). (Voir Figure 7)

FIGURE 7 – Le comportement d'une flèche de  $W_j(t_1)$  suite aux mutations  $\mu_j\mu_i\mu_j$ .

Afin d'éliminer la flèche  $\beta' : k \rightarrow i$  dans  $t_4$ , on a besoin soit d'une flèche  $j \rightarrow k$  dans  $t_3$ , soit d'une flèche  $\beta : k \rightarrow i$  dans  $t_1$ .

Afin d'être dans le premier cas, il faudrait qu'il n'y ait pas de flèche  $k \rightarrow j$  dans  $t_2$ , ce qui revient à dire qu'il n'y a pas de flèche  $j \rightarrow k$  dans  $t_1$ . Or, cela veut dire qu'il n'y aurait tout simplement pas de flèches  $\beta$  créées. Ce cas ne peut donc pas être considéré.

Le deuxième cas vient directement empêcher l'apparition de la flèche  $i \rightarrow k$  dans  $t_2$ . Ce cas correspond à l'existence d'un chemin de longueur deux  $j \rightarrow k \rightarrow i$  dans  $t_1$ , donc un couple fidèle. Ainsi, la présence d'un couple fidèle  $j \rightarrow k \rightarrow i$  dans  $t_1$  élimine une flèche  $k \rightarrow i$  dans  $t_4$  que l'on peut créer grâce à la flèche  $j \rightarrow k$  dans  $t_1$ . (Voir Figure 8)

FIGURE 8 – Le comportement d'un couple fidèle suite aux mutations  $\mu_j\mu_i\mu_j$ .

(b) On prouve ensuite que  $M_j(t_6)' = \frac{W_j(t_1)'}{\text{CouF}_{(i,j)}(t_1)}$ .

On commence par montrer qu'on ne peut pas créer de flèches  $k \rightarrow j$  en appliquant la suite de mutations  $\mu_j \mu_i$  à  $t_1$ .

Supposons que lors de la première mutation,  $\mu_i$ , on ait créé une flèche  $j \rightarrow k$  qui deviendra entrante dans  $t_6$ . Il faut donc que  $t_1$  contienne un chemin de longueur deux  $j \rightarrow i \rightarrow k$  et cela est impossible, parce que  $t_1$  contient la flèche  $i \rightarrow j$ .

Lors de la deuxième mutation, on mute en  $j$ , donc on ne peut pas créer de nouvelles flèches incident à  $j$ .

Il faut ensuite montrer que les flèches de  $W_j(t_1)'$  peuvent devenir des flèches entrant en  $j$  dans  $t_6$ .

En général, on a que les flèches de  $W_j(t_1)'$  deviennent des flèches entrantes en  $j$  dans  $t_6$ . En effet, lors de la deuxième mutation ( $\mu_j$ ), toute flèche sortant de  $j$  devient entrante en  $j$ .

On remarque que les flèches de  $W_j(t_1)'$ ,  $\alpha : j \rightarrow k$ , peuvent disparaître avant même de changer d'orientation et de devenir entrantes en  $j$  dans  $t_6$ . En effet, il est possible de faire disparaître ces flèches s'il y a des flèches entrant en  $i$  dans  $t_1$  de la forme  $\beta : k \rightarrow i$ . Dans ce cas, on a un chemin de longueur deux  $k \rightarrow i \rightarrow j$  dans  $t_1$  qui engendre une flèche  $k \rightarrow j$  suite à  $\mu_i$ . Cette nouvelle flèche  $k \rightarrow j$  élimine la flèche  $\alpha$  qui deviendrait entrante en  $j$  dans  $t_6$ . Ce cas correspond en fait à avoir un couple fidèle. (Voir Figure 9)

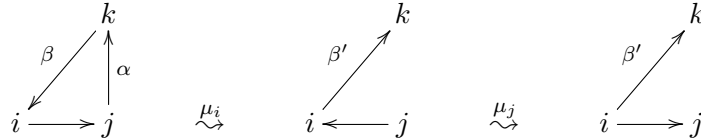


FIGURE 9 – Le comportement d'un couple fidèle suite aux mutations  $\mu_j \mu_i$ .

□

**Lemme 3.14.**  $W_i(t_4)' = W_j(t_6)' = \frac{M_i(t_1)'}{\text{CouF}_{(i,j)}(t_1)} \cdot M_j(t_1)'$ .

*Démonstration.* La preuve se fait en deux étapes.

(a) On prouve d'abord que  $W_i(t_4)' = \frac{M_i(t_1)'}{\text{CouF}_{(i,j)}(t_1)} \cdot M_j(t_1)'$ .

On commence par montrer que les flèches de  $M_j(t_1)'$  créent des flèches sortantes de  $i$  dans  $t_4$ .

On peut voir qu'une flèche  $\alpha : k \rightarrow j$  entrant en  $j$  dans  $t_1$  crée une flèche  $\beta : i \rightarrow k$  sortant de  $i$  dans  $t_4$ , car il existe un chemin de longueur deux

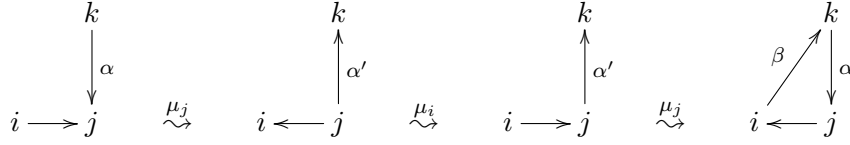


FIGURE 10 – Le comportement d'une flèche de  $M_j(t_1)$  suite aux mutations  $\mu_j\mu_i\mu_j$ .

$i \rightarrow j \rightarrow k$  dans  $t_3$ . Il suffit de montrer que les flèches de  $M_j(t_1)'$  ne peuvent pas disparaître lors des deux premières mutations. (Voir Figure 10)

En effet, lors de la première mutation, on mute en  $j$ , alors on ne peut pas effacer de flèches incidentes à  $j$ .

Supposons que lors de la deuxième mutation  $\mu_i$ , on ait effacé une flèche entrant en  $j$  dans  $t_1$ , disons  $k \rightarrow j$ . Puisque cette flèche devient  $j \rightarrow k$  dans  $t_2$ , il faut que  $t_2$  contienne un chemin de longueur deux  $k \rightarrow i \rightarrow j$  et cela est impossible, parce que  $t_2$  contient la flèche  $j \rightarrow i$ .

Il reste à montrer que les flèches de  $M_i(t_1)'$  peuvent créer des flèches sortantes de  $i$  dans  $t_4$ .

Une flèche entrante en  $i$  dans  $t_1$  sera, en général, sortante dans  $t_4$  puisqu'elle aura été renversée lors de la deuxième mutation ( $\mu_i$ ) et qu'elle ne peut pas disparaître lors de la dernière mutation ( $\mu_j$ ).

En effet, pour faire disparaître une flèche  $i \rightarrow k$  lors de la dernière mutation il faudrait un chemin de longueur deux  $k \rightarrow j \rightarrow i$ , ce qui est impossible car dans  $t_3$  on a la flèche  $i \rightarrow j$ .

Il est possible d'éliminer les flèches entrant en  $i$  dans  $t_1$  dans la première mutation. En effet, s'il y a une flèche  $\alpha : j \rightarrow k$  dans  $t_1$ , cela crée un chemin de longueur deux  $i \rightarrow j \rightarrow k$  qui vient éliminer une flèche  $\beta : k \rightarrow i$ . Cela correspond en fait à avoir un chemin de longueur deux  $j \rightarrow k \rightarrow i$  dans  $t_1$ , soit un couple fidèle. (Voir Figure 11)

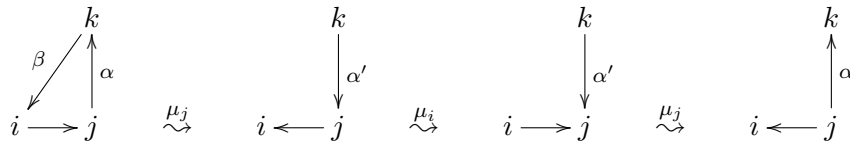


FIGURE 11 – Le comportement d'un couple fidèle suite aux mutations  $\mu_j\mu_i\mu_j$ .

(b) On prouve ensuite que  $W_j(t_6)' = \frac{M_i(t_1)'}{\text{CouF}_{(i,j)}(t_1)} \cdot M_j(t_1)'$ .

On commence par montrer que les flèches de  $M_j(t_1)'$  créent des flèches sortantes de  $j$  dans  $t_6$ .

Les flèches entrantes en  $j$  dans  $t_1$  deviennent sortantes de  $j$  dans  $t_6$  car on ne mute qu'une seule fois sur  $j$ . En effet, ces flèches ne peuvent pas disparaître. Lors de la première mutation, on mute en  $i$ , alors la flèche  $j \rightarrow i$  est nécessaire afin de faire disparaître ces flèches. Or, cela est impossible.

Lors de la deuxième mutation, on mute en  $j$ , alors on ne peut pas créer ou effacer de flèches incidentes à  $j$ . Le nombre de flèches incidentes à  $j$  ne varie donc pas pour ces mutations.

Il faut ensuite montrer que les flèches de  $M_i(t_1)'$  peuvent créer des flèches sortantes de  $j$  dans  $t_6$ .

En général, une flèche  $\alpha : k \rightarrow i$  entrante en  $i$  dans  $t_1$  va créer une flèche  $\beta : k \rightarrow j$  entrante en  $j$  lors de la première mutation  $\mu_i$ , qui deviendra sortante suite à la deuxième mutation  $\mu_j$ . (Voir Figure 12)

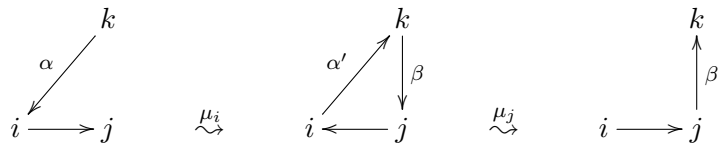


FIGURE 12 – Le comportement d’une flèche provenant de  $M_j(t_1)$  suite aux mutations  $\mu_j\mu_i$ .

Dans le cas où il y aurait une flèche  $j \rightarrow k$  dans  $t_1$ , cette dernière élimine la flèche créée par la flèche entrant en  $i$  dans  $t_1$ . Cela correspond en fait à avoir un chemin de longueur deux  $j \rightarrow k \rightarrow i$  dans  $t_1$ , soit un couple fidèle. Donc, la présence d’un couple fidèle  $j \rightarrow j \rightarrow i$  dans  $t_1$  élimine une flèche qui aurait pu devenir sortante de  $j$  dans  $t_6$ .

□

*Remarque 3.15.* Soit  $Q$  un carquois et  $i$  et  $j$  deux points de  $Q$  tel qu’il y a une unique flèche  $i \rightarrow j$ .

Les lemmes 3.8, 3.12, 3.13 et 3.14 montrent que pour toutes flèches  $k \rightarrow i$  (resp.  $i \rightarrow k$ ) dans  $\mu_j\mu_i(Q)$  il existe une flèche  $k \rightarrow j$  (resp.  $j \rightarrow k$ ) dans  $\mu_j\mu_i\mu_j(Q)$  et que pour toutes flèches  $k \rightarrow j$  (resp.  $j \rightarrow k$ ) dans  $\mu_j\mu_i(Q)$  il existe une flèche  $k \rightarrow i$  (resp.  $i \rightarrow k$ ) dans  $\mu_j\mu_i\mu_j(Q)$ . Ainsi, les flèches incidentes à  $i$  dans un des deux carquois sont incidentes à  $j$  dans l’autre.

**(b) Deuxième partie de la preuve : les flèches incidentes aux points autres que  $i$  et  $j$**

Nous sommes maintenant rendus à la deuxième partie de la preuve. Dans cette partie, nous voulons prouver que les carquois  $t_4$  et  $t_6$  sont les mêmes si on exclut

les points  $i$  et  $j$  et leurs flèches incidentes. En d'autres termes, il faut montrer que les carquois  $t_4$  et  $t_6$  ont exactement les mêmes flèches entre leurs points qui ne sont pas  $i$  et  $j$ . Nous ne considérons pas dans cette partie les flèches touchant à  $i$  ou à  $j$  car ceci a été fait dans la première partie.

Commençons par énoncer et prouver quelques lemmes.

Pour ce faire, prenons  $Q$  un carquois qui possède les points  $i$  et  $j$  tel qu'il y a une unique flèche  $i \rightarrow j$ . De plus, appelons  $Q'$  un carquois tel que  $Q'_0 = \{i, j, k, l\}$ . Les points  $k$  et  $l$  sont deux points arbitraires dont l'ensemble,  $\{k, l\}$ , est relié par au moins une flèche à l'ensemble  $\{i, j\}$ . Ainsi,  $Q'$  est un sous-carquois plein de  $Q$ , ce qui veut dire qu'il contient toutes les flèches que  $Q$  a entre les points  $i, j, k$  et  $l$ . Posons sans perte de généralité qu'il n'y a pas de flèches entre  $k$  et  $l$  dans le carquois  $Q$ , donc dans  $t_1$ , car nous allons travailler avec le nombre de nouvelles flèches entre  $k$  et  $l$  créées lors des mutations et donc le nombre initial de flèches importe peu. Pour la deuxième partie de la preuve, nous pouvons travailler seulement avec ces quatre points et vérifier si dans  $t_4$  et  $t_6$  il y a les mêmes flèches entre  $k$  et  $l$ .

Tout d'abord, il faut voir de quelle façon nous pouvons créer une flèche entre  $k$  et  $l$  lors des mutations sur  $i$  et sur  $j$ .

Pour  $\mu_i$ , nous pouvons créer une flèche  $k \rightarrow l$  si le carquois possède une flèche  $k \rightarrow i$  et une flèche  $i \rightarrow l$ . Pour créer une flèche  $l \rightarrow k$ , il faut une flèche  $l \rightarrow i$  et une flèche  $i \rightarrow k$ . (Voir Figure 13)



FIGURE 13 – Ces carquois représentent la forme générale des carquois pouvant générer une flèche entre  $k$  et  $l$  suite à  $\mu_i$ . Remarquons que la flèche entre  $i$  et  $j$  est dans les deux sens, car son sens importe peu pour la création de flèches entre  $k$  et  $l$ . En effet, qu'elle soit  $i \rightarrow j$  ou  $i \leftarrow j$ , pour le premier cas, il y aura toujours une flèche  $k \rightarrow l$  de créée.

Pour  $\mu_j$ , nous pouvons créer une flèche  $k \rightarrow l$  si le carquois possède une flèche  $k \rightarrow j$  et une flèche  $j \rightarrow l$ . Pour obtenir plutôt une flèche de  $l \rightarrow k$ , il faut une flèche  $l \rightarrow j$  et une flèche  $j \rightarrow k$ . (Voir Figure 14)

Pour simplifier les choses, nous donnons une notation au nombre de flèches présentes dans le carquois  $Q'$  comme suit dans le tableau 1. Par exemple, s'il y a deux flèches  $k \rightarrow i$  dans le carquois, on note  $k \xrightarrow{2} i$ .

Ces nombres de flèches ne peuvent être négatifs. Par exemple, si  $a$  est négatif, cela implique que les flèches sont, par convention,  $i \rightarrow k$ , et il n'y a donc pas de flèches  $k \rightarrow i$ . Ainsi, on a que  $a > 0$  implique  $a' = 0$  et  $a' > 0$  implique  $a = 0$ . De même pour  $b$  et  $b'$ ,  $d$  et  $d'$  ainsi que  $e$  et  $e'$ .





FIGURE 14 – Ces carquois représentent la forme générale des carquois pouvant générer une flèche entre  $k$  et  $l$  suite à  $\mu_j$ . Remarquons que la flèche entre  $i$  et  $j$  est dans les deux sens, car son sens importe peu pour la création de flèches entre  $k$  et  $l$ .

Flèche	Nombre de flèches
$k \rightarrow i$	$a$
$i \rightarrow k$	$a'$
$l \rightarrow i$	$b$
$i \rightarrow l$	$b'$
$k \rightarrow j$	$d$
$j \rightarrow k$	$d'$
$l \rightarrow j$	$e$
$j \rightarrow l$	$e'$

TABLE 1 – Le nombre de flèches que l’on pose en fonction de leur source et de leur but, où  $a, a', b, b', d, d', e, e' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

*Notation 3.16.* Soit  $x \in \mathbb{Z}$ . On note  $(x)_+$  le maximum entre  $x$  et 0. En d’autres termes, si  $x$  est négatif alors  $(x)_+ = 0$  et si  $x$  est positif alors  $(x)_+ = x$ .

**Lemme 3.17.** Il y a  $[ab' + (d+a-d')_+(e'-b-e)_+] - [a'b + (e+b-e')_+(d'-a-d)_+]$  flèches créées entre  $k$  et  $l$  lors de la suite de mutations  $\mu_j \mu_i$  (selon les lettres du tableau 1).

Si le nombre de flèches est positif, alors les flèches sont dans le sens  $k \rightarrow l$ . Dans le cas contraire, les flèches sont dans le sens  $l \rightarrow k$ .

*Démonstration.* En utilisant le tableau 1, nous pouvons déterminer les flèches créées entre  $k$  et  $l$  lors de la mutation  $\mu_i$ . En effet, pour créer une flèche  $k \rightarrow l$  lors de  $\mu_i$ , il faut une flèche  $k \rightarrow i$  avec une flèche  $i \rightarrow l$ . Ainsi, cela implique qu’il y a  $ab'$  flèches  $k \rightarrow l$  créées, car il y a  $a$  flèches  $k \rightarrow i$  et  $b'$  flèches  $i \rightarrow l$  (tableau 1). De même, pour créer une flèche  $l \rightarrow k$  il faut une flèche  $l \rightarrow i$  avec une flèche  $i \rightarrow k$ . Il y a donc  $a'b$  flèches  $l \rightarrow k$  créées, car il y a  $a'$  flèches  $i \rightarrow k$  et  $b$  flèches  $l \rightarrow i$ .

En bref, la mutation  $\mu_i$  de  $t_1$  à  $t_5$  crée :

$$ab' \text{ flèches } k \rightarrow l$$

et

$$a'b \text{ flèches } l \rightarrow k.$$

Flèche	Nombre de flèches
$k \rightarrow i$	$a'$
$i \rightarrow k$	$a$
$l \rightarrow i$	$b'$
$i \rightarrow l$	$b$
$k \rightarrow j$	$(d + a - d')_+$
$j \rightarrow k$	$(d' - a - d)_+$
$l \rightarrow j$	$(e + b - e')_+$
$j \rightarrow l$	$(e' - b - e)_+$

TABLE 2 – Le nombre de flèches dans  $t_5$  en fonction de leur source et de leur but.

Nous pouvons maintenant déterminer le nombre de flèches entre chaque paire de points du carquois à la suite de la mutation  $\mu_i$  et ainsi renouveler le tableau des nombres de flèches pour celui du carquois  $t_5$ .

Commençons avec les flèches reliées à  $i$ . Lors de  $\mu_i$ , toutes les flèches incidentes à  $i$  changent de sens, ce qui implique que, par exemple, les flèches  $k \rightarrow i$  deviennent  $i \rightarrow k$  et les flèches  $i \rightarrow k$  deviennent  $k \rightarrow i$ . Ainsi, il y a désormais  $a'$  flèches  $k \rightarrow i$  et  $a$  flèches  $i \rightarrow k$ . De même pour les flèches reliant  $i$  à  $l$ .

Pour les flèches reliées à  $j$ , il peut y avoir des changements suite à  $\mu_i$ . Lors de  $\mu_i$ , la flèche entre  $i$  et  $j$  est  $i \rightarrow j$ , ce qui implique que seules des flèches  $k \rightarrow j$  et  $l \rightarrow j$  peuvent être créées. Par exemple, pour les flèches  $k \rightarrow j$ , leur nombre est maintenant la quantité initiale  $d$ , additionnée à la quantité de nouvelles flèches  $a$ , moins le nombre de flèches  $d'$  dans l'autre sens au départ. La quantité de nouvelles flèches  $k \rightarrow j$  dépend de la quantité de flèches  $k \rightarrow i$  avant  $\mu_i$ , car ce sont les chemins de longueur deux  $k \rightarrow i \rightarrow j$  qui créent les nouvelles flèches  $k \rightarrow j$  (et il y a toujours une seule flèche  $i \rightarrow j$ ). Ainsi, il y a  $(d + a - d')$  flèches  $k \rightarrow j$  après  $\mu_i$ . On fait de même pour les autres flèches reliées à  $j$ .

Cependant, il faut mentionner que les nombres de flèches trouvés ne peuvent être négatifs, car s'ils le sont, cela veut dire que les flèches sont dans l'autre sens, et donc qu'il n'y a aucune flèche dans le sens voulu, car il n'y a pas de cycles de longueur deux dans les carquois. Par exemple, pour  $k \rightarrow j$ , si  $(d + a - d') < 0$ , les flèches sont en fait  $j \rightarrow k$  et il n'y a pas de flèches  $k \rightarrow j$ . Ainsi, nous notons  $(d + a - d')_+$  pour indiquer que si le résultat de la parenthèse est négatif, on lui donne la valeur 0.

Les nombres des flèches dans  $t_5$  sont donc :

Avec le tableau 2, nous pouvons déterminer les flèches créées entre  $k$  et  $l$  lors de la deuxième mutation, soit  $\mu_j$ . En effet, pour créer une flèche  $k \rightarrow l$  lors de  $\mu_j$ , il faut une flèche  $k \rightarrow j$  avec une flèche  $j \rightarrow l$ . Ainsi, cela implique qu'il y a  $(d + a - d')_+(e' - b - e)_+$  flèches  $k \rightarrow l$  de créées, car il y a  $(d + a - d')_+$  flèches  $k \rightarrow j$  et  $(e' - b - e)_+$  flèches  $j \rightarrow l$  (tableau 2). De même, pour créer une flèche  $l \rightarrow k$  il faut une flèche  $l \rightarrow j$  avec une flèche  $j \rightarrow k$ . Il y a donc  $(e + b - e')_+(d' - a - d)_+$  flèches  $l \rightarrow k$  de créées, car il y a  $(d' - a - d)_+$  flèches

$j \rightarrow k$  et  $(e + b - e')_+$  flèches  $l \rightarrow j$ .

Ainsi, la mutation  $\mu_j$  de  $t_5$  à  $t_6$  crée :

$$(d + a - d')_+(e' - b - e)_+ \text{ flèches } k \rightarrow l$$

et

$$(e + b - e')_+(d' - a - d)_+ \text{ flèches } l \rightarrow k.$$

Nous avons maintenant le nombre de flèches entre  $k$  et  $l$  créées lors de  $\mu_i$  et lors de  $\mu_j$ . Nous pouvons donc déterminer le nombre total de flèches nouvelles dans  $t_6$ .

Si on pose que le nombre de flèches est positif quand le sens est  $k \rightarrow l$  et qu'il est négatif quand le sens est  $l \rightarrow k$ , il y a donc  $[ab' + (d + a - d')_+(e' - b - e)_+] - [a'b + (e + b - e')_+(d' - a - d)_+]$  flèches créées entre  $k$  et  $l$  lors de la suite de mutations  $\mu_j\mu_i$ . (Afin de faciliter la lecture, on utilisera la notation Flèches  $k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i}$  lorsqu'on voudra faire référence à ce nombre de flèches.) □

**Lemme 3.18.** *Il y a  $\{de' + (a - d' - a')_+(b' + e' - b)_+ + [d' - (a' + d' - a)_+ - d]_+[e + (b' + e' - b)_+ - e']_+\} - \{ed' + (b - e' - b')_+(a' + d' - a)_+ + [e' - (b' + e' - b)_+ - e]_+[d + (a' + d' - a)_+ - d']_+\}$  flèches créées entre  $k$  et  $l$  lors de la suite de mutations  $\mu_j\mu_i\mu_j$  (selon les lettres du tableau 1).*

*Si le nombre de flèches est positif, alors les flèches sont dans le sens  $k \rightarrow l$ . Dans le cas contraire, les flèches sont dans le sens  $l \rightarrow k$ .*

*Démonstration.* Pour cette démonstration, nous travaillons encore avec le tableau 1 pour les nombres initiaux des flèches entre chaque point du carquois  $Q'$ . Comme les flèches  $k \rightarrow l$  créées dépendent des couples  $k \rightarrow j$  et  $j \rightarrow l$ , nous obtenons  $de'$  flèches  $k \rightarrow l$ . De plus, comme les flèches  $l \rightarrow k$  dépendent des couples  $l \rightarrow j$  et  $j \rightarrow k$ , nous obtenons  $ed'$  flèches  $l \rightarrow k$ .

Ainsi, la mutation  $\mu_j$  de  $t_1$  à  $t_2$  crée :

$$de' \text{ flèches } k \rightarrow l$$

et

$$ed' \text{ flèches } l \rightarrow k.$$

Nous pouvons ensuite déterminer le nombre de flèches entre chaque point du carquois à la suite de la mutation  $\mu_j$  et ainsi renouveler le tableau des nombres de flèches pour obtenir celui du carquois  $t_2$ .

Commençons avec les flèches reliées à  $j$ . Lors de  $\mu_j$ , toutes les flèches touchant à  $j$  changent de sens, ce qui implique que la quantité de flèches  $x \rightarrow j$  devient la quantité de flèches  $j \rightarrow x$  et vice-versa.

De plus, il peut y avoir des changements dans les flèches reliées à  $i$  lors de la mutation  $\mu_j$ . En effet, lors de  $\mu_j$ , la flèche entre  $i$  et  $j$  est  $i \rightarrow j$ , ce qui peut créer des flèches  $i \rightarrow k$  et  $i \rightarrow l$ . Alors, si on prend comme exemple les flèches  $k \rightarrow i$ , leur nombre est maintenant la quantité initiale  $a$ , à laquelle l'on soustrait la quantité  $d'$  de nouvelles flèches  $i \rightarrow k$  car elles sont dans le sens opposé, moins la quantité  $a'$  des flèches dans l'autre sens au départ. La quantité de nouvelles flèches  $i \rightarrow k$  dépend de la quantité de flèches  $j \rightarrow k$  avant  $\mu_j$ , car ce sont les

chemins de longueur deux  $i \rightarrow j \rightarrow k$  qui créent les nouvelles flèches  $i \rightarrow k$  lors de la mutation (et que la quantité de la flèche  $i \rightarrow j$  est toujours 1). Il y a donc  $(a - d' - a')$  flèches  $k \rightarrow i$  après  $\mu_j$ . On fait de même pour les autres flèches reliées à  $i$ . Encore une fois, si le nombre de flèches est négatif on doit le poser 0. Ainsi on note plutôt  $(a - d' - a')_+$ .

Le tableau pour  $t_2$  est donc :

Flèche	Nombre de flèches
$k \rightarrow i$	$(a - d' - a')_+$
$i \rightarrow k$	$(a' + d' - a)_+$
$l \rightarrow i$	$(b - e' - b')_+$
$i \rightarrow l$	$(b' + e' - b)_+$
$k \rightarrow j$	$d'$
$j \rightarrow k$	$d$
$l \rightarrow j$	$e'$
$j \rightarrow l$	$e$

Tableau 3

Avec le tableau 3, nous pouvons déterminer les flèches créées entre  $k$  et  $l$  lors de la deuxième mutation, soit  $\mu_i$ , par les mêmes méthodes qu'auparavant.

Alors, la mutation  $\mu_i$  de  $t_2$  à  $t_3$  crée :

$$(a - d' - a')_+(b' + e' - b)_+ \text{ flèches } k \rightarrow l$$

et

$$(b - e' - b')_+(a' + d' - a)_+ \text{ flèches } l \rightarrow k.$$

Nous pouvons par la suite utiliser les mêmes méthodes que précédemment pour déterminer les quantités des flèches entre chaque paire de points du carquois suite à la mutation  $\mu_i$ .

Nous obtenons de cette façon ce nouveau tableau des nombres de flèches pour  $t_3$  :

Flèche	Nombre de flèches
$k \rightarrow i$	$(a' + d' - a)_+$
$i \rightarrow k$	$(a - d' - a')_+$
$l \rightarrow i$	$(b' + e' - b)_+$
$i \rightarrow l$	$(b - e' - b')_+$
$k \rightarrow j$	$[d' - (a' + d' - a)_+ - d]_+$
$j \rightarrow k$	$[d + (a' + d' - a)_+ - d']_+$
$l \rightarrow j$	$[e' - (b' + e' - b)_+ - e]_+$
$j \rightarrow l$	$[e + (b' + e' - b)_+ - e']_+$

Tableau 4

Il ne reste qu'une mutation à effectuer, soit  $\mu_j$ . Grâce au tableau 4 nous pouvons déterminer les flèches entre  $k$  et  $l$  créées lors de cette mutation de la même façon qu'auparavant.

Ainsi, la mutation  $\mu_j$  de  $t_3$  à  $t_4$  crée :

$$\begin{aligned}
& [d' - (a' + d' - a)_+ - d]_+[e + (b' + e' - b)_+ - e']_+ \text{ flèches } k \rightarrow l \\
& \qquad \qquad \qquad \text{et} \\
& [e' - (b' + e' - b)_+ - e]_+[d + (a' + d' - a)_+ - d']_+ \text{ flèches } l \rightarrow k.
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi toutes les nouvelles flèches entre  $k$  et  $l$  lors de  $\mu_j, \mu_i$  et puis  $\mu_j$ . Nous pouvons donc déterminer le nombre total de nouvelles flèches.

Si l'on considère encore une fois qu'un nombre de flèches positif implique le sens  $k \rightarrow l$  et négatif le sens inverse, on a donc qu'il y a  $\{de' + (a - d' - a')_+(b' + e' - b)_+ + [d' - (a' + d' - a)_+ - d]_+[e + (b' + e' - b)_+ - e']_+\} - \{ed' + (b - e' - b')_+(a' + d' - a)_+ + [e' - (b' + e' - b)_+ - e]_+[d + (a' + d' - a)_+ - d']_+\}$  flèches créées entre  $k$  et  $l$  lors de la suite de mutations  $\mu_j\mu_i\mu_j$ . (Afin de faciliter la lecture, on utilisera la notation Flèches  $k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i\mu_j}$  lorsqu'on voudra faire référence à ce nombre de flèches.) □

**Lemme 3.19.** *Il y a le même nombre de flèches en  $t_6$  et en  $t_4$  entre  $k$  et  $l$ .*

*Démonstration.* Les expressions pour les nombres de flèches entre  $k$  et  $l$  dans les carquois  $t_4$  et  $t_6$  sont données dans le lemme 3.17 et le lemme 3.18 respectivement. Il faut vérifier que ces expressions coïcident, c'est-à-dire il faut montrer que

$$\text{Flèches } k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i} = \text{Flèches } k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i\mu_j} \quad (1)$$

Il faut d'abord rappeler que dans le carquois initial  $Q'$ ,  $a$  et  $a'$  ne peuvent être non nuls en même temps, et donc  $a > 0$  implique  $a' = 0$  et,  $a' > 0$  implique  $a = 0$ . De même pour  $b$  et  $b'$ ,  $d$  et  $d'$  et  $e$  et  $e'$ . Ainsi, parmi les huit variables il y en a au moins quatre qui sont nulles peu importe le carquois.

Il y a 16 cas possibles de groupe de variables nulles :

- |                            |                               |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1. $a = b = d = e = 0$ .   | 9. $a' = b' = d' = e = 0$ .   |
| 2. $a' = b = d = e = 0$ .  | 10. $a' = b' = d = e' = 0$ .  |
| 3. $a = b' = d = e = 0$ .  | 11. $a' = b = d' = e' = 0$ .  |
| 4. $a = b = d' = e = 0$ .  | 12. $a = b' = d' = e' = 0$ .  |
| 5. $a = b = d = e' = 0$ .  | 13. $a = b = d' = e' = 0$ .   |
| 6. $a' = b' = d = e = 0$ . | 14. $a = b' = d' = e = 0$ .   |
| 7. $a' = b = d' = e = 0$ . | 15. $a = b' = d = e' = 0$ .   |
| 8. $a' = b = d = e' = 0$ . | 16. $a' = b' = d' = e' = 0$ . |

Pour vérifier l'équation 1, il faut comparer les termes à gauche et à droite pour ces 16 cas. Si dans tous les cas les termes donnent le même résultat, on

concluera qu'ils sont égales et donc qu'il y a le même nombre de flèches créées entre  $k$  et  $l$  lors des suites de mutations  $\mu_j\mu_i$  et  $\mu_j\mu_i\mu_j$ .

Il reste à vérifier les 16 cas. Il faut se remémorer que  $a, a', b, b', d, d', e, e'$  sont tous positifs ou nuls.

Cas 1

$$a = b = d = e = 0.$$

Pour  $t_6$

$$\begin{aligned} \text{Flèches } k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i} &= [0 \cdot b' + (0 + 0 - d')_+(e' - 0 - 0)_+] \\ &\quad - [a' \cdot 0 + (0 + 0 - e')_+(d' - 0 - 0)_+] \\ &= [(-d')_+(e')_+] - [(-e')_+(d')_+] \\ &= [0 \cdot (e')] - [0 \cdot (d')] \\ &= 0. \end{aligned}$$

$(-d')_+ = 0$ , car  $d'$  est positif donc  $-d'$  est négatif.  $(e')_+ = (e')$  car  $e'$  est positif donc le maximum entre  $e'$  et 0 sera  $e'$ .

Pour  $t_4$

$$\begin{aligned} \text{Flèches } k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i\mu_j} &= \{(-d' - a')_+(b' + e')_+ + [d' - (a' + d')_+]_+[(b' + e')_+ - e']_+\} \\ &\quad - \{(-e' - b')_+(a' + d')_+ + [e' - (b' + e')_+]_+[(a' + d')_+ - d']_+\} \\ &= \{0 \cdot (b' + e') + [d' - a' - d']_+[b' + e' - e']_+\} \\ &\quad - \{0 \cdot (a' + d') + [e' - b' - e']_+[a' + d' - d']_+\} \\ &= \{0 + (-a')_+(b')_+\} - \{0 + (-b')_+(a')_+\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On obtient 0 des deux côtés et donc les deux expressions sont égales pour le cas  $a = b = d = e = 0$ .

Cas 2

$$a' = b = d = e = 0.$$

Pour  $t_6$

$$\begin{aligned} \text{Flèches } k \rightarrow l_{\mu_j\mu_i} &= [ab' + (0 + a - d')_+(e' - 0 - 0)_+] \\ &\quad - [0 + (0 + 0 - e')_+(d' - a - 0)_+] \\ &= [ab' + (a - d')_+(e')_+] - [(-e')_+(d' - a)_+] \\ &= [ab' + (a - d')_+(e')] - [0 \cdot (d' - a)_+] \\ &= [ab' + (a - d')_+(e')] - 0 \\ &= [ab' + (a - d')_+(e')]. \end{aligned}$$

Si  $a > d'$ ,

alors  $(a - d') > 0$  et donc  $(a - d')_+ = (a - d')$ . L'expression devient

$$[ab' + (a - d')e'] = ab' + ae' - d'e'.$$

Si  $a < d'$ ,

alors  $(a - d') < 0$  et donc  $(a - d')_+ = 0$ . L'expression devient

$$[ab' + 0 \cdot e'] = ab'.$$

Pour  $t_4$

$$\begin{aligned} \text{Flèches } k \rightarrow l_{\mu_j \mu_i \mu_j} &= \{(a - d')_+(b' + e')_+ + [d' - (d' - a)_+]_+[(b' + e')_+ - e']_+\} \\ &\quad - \{(-e' - b')_+(d' - a)_+ + [e' - (b' + e')_+]_+[(d' - a)_+ - d']_+\} \\ &= \{(a - d')_+(b' + e') + [d' - (d' - a)_+]_+[b' + e' - e']_+\} \\ &\quad - \{0 \cdot (d' - a)_+ + [e' - b' - e']_+[(d' - a)_+ - d']_+\} \\ &= \{(a - d')_+(b' + e') + [d' - (d' - a)_+]_+[b']_+\} \\ &\quad - \{0 + [-b']_+[(d' - a)_+ - d']_+\} \\ &= \{(a - d')_+(b' + e') + [d' - (d' - a)_+]_+b'\} \\ &\quad - \{0 \cdot [(d' - a)_+ - d']_+\} \\ &= \{(a - d')_+(b' + e') + [d' - (d' - a)_+]_+b'\} - 0 \\ &= \{(a - d')_+(b' + e') + [d' - (d' - a)_+]_+b'\}. \end{aligned}$$

Si  $a > d'$ , cette expression devient

$$\begin{aligned} &\{(a - d')(b' + e') + [d' - 0]_+b'\} \\ &= \{ab' + ae' - d'b - d'e' + d'b'\} \\ &= ab' + ae' - d'e'. \end{aligned}$$

Si  $a < d'$ , cette expression devient

$$\begin{aligned} &\{0 \cdot (b' + e') + [d' - (d' - a)]_+b'\} \\ &= \{0 + [a]_+b'\} \\ &= ab'. \end{aligned}$$

Ainsi, dans les deux cas on obtient  $ab' + ae' - d'e'$  lorsque  $a > d'$  et  $ab'$  lorsque  $a < d'$ . Les deux expressions sont donc les mêmes dans le cas  $a' = b = d = e = 0$ .

Les autres cas se vérifient de façon analogue et on peut alors déterminer que les deux expressions sont égales dans les 16 cas.

□

*Remarque 3.20.* Soit  $Q$  un carquois et  $i$  et  $j$  deux points de  $Q$  tels qu'il y a une unique flèche  $i \rightarrow j$ .

Les lemmes 3.17, 3.18 et 3.19 montrent que  $t_6$  et  $t_4$  ont le même nombre de flèches créées dans le même sens entre  $k$  et  $l$ . S'il y a le même nombre de flèches créées, alors il y a le même nombre de flèches totales, car  $t_4$  et  $t_6$  ont le même carquois initial  $t_1$ . Les points  $k$  et  $l$  étant arbitraires, cela est vrai pour tout couple de points du carquois voisins de  $i$  ou de  $j$ . Ainsi,  $t_6$  a exactement les mêmes flèches (sens et quantité) entre les points voisins de  $i$  et  $j$  que  $t_4$ . De plus, il est évident que les suites de mutations n'affectent pas les flèches incidentes aux points non voisins de  $i$  et de  $j$ . Ainsi, les carquois  $\mu_j\mu_i(Q)$  et  $\mu_j\mu_i\mu_j(Q)$  sont les mêmes si on exclut les flèches incidentes aux points  $i$  et  $j$ .

## 4 Le graphe d'échange

### 4.1 Graines et mutations

**Définition 4.1.** La *mutation d'une graine*  $G = (Q, X)$  au point  $k$  est donnée par  $\mu_k(G) = (\mu_k(Q), \mu_k(X))$ , où la *mutation d'un amas*  $X = \{x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}$  en  $x_k$  est donnée par  $\mu_k(X) = X \setminus \{x_k\} \cup \{x_k'\}$ . De plus,  $x_k' = \frac{1}{x_k} \cdot (\prod_{i \rightarrow k} x_i + \prod_{k \rightarrow j} x_j)$ , où les produits sont pris sur l'ensemble des flèches de but  $j$  ou de source  $i$ , respectivement.

Ainsi, une mutation sur une graine correspond à l'application simultanée de la mutation sur son carquois et de la mutation sur son amas.

*Remarque 4.2.* Par convention, on attribue une valeur de 1 au produit vide de  $\prod_{i \rightarrow k} x_i$  ou de  $\prod_{k \rightarrow j} x_j$ .

**Exemple 4.3.** Soit  $G$  la graine suivante :

$$x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3$$

Alors,  $\mu_1(G)$  correspond à la graine suivante :

$$\frac{x_2+1}{x_1} \longleftarrow x_2 \longrightarrow x_3$$

**Définition 4.4.** Soit  $G = (Q, X)$  une graine. On nomme *variables initiales* les variables de l'amas  $X$ . De plus, on nomme *variables amassées* les variables de tous les amas pouvant être obtenus par mutations successives sur  $G$ . Notons également  $\mathfrak{X}$  l'ensemble des variables amassées.

**Définition 4.5.** Soit  $G = (Q, X)$  une graine et  $\mathfrak{X}$  l'ensemble des variables amassées obtenues grâce à cette graine. L'*algèbre amassée*  $\mathcal{A}(Q, X)$  est l'anneau de polynômes à coefficients entiers sur les variables de  $\mathfrak{X}$ , soit  $\mathbb{Z}[\mathfrak{X}]$ .



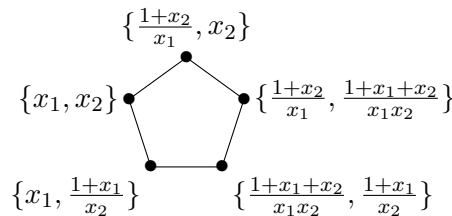
## 4.2 Graphe d'échange

**Définition 4.6.** Le *graphe d'échange*  $\Gamma(G)$  d'une graine  $G = (Q, X)$  est un graphe dont les points sont toutes les graines pouvant être obtenues par mutations successives sur  $G$ . Si la cardinalité de  $X$  est  $n$ , deux points sont reliés dans le graphe si l'intersection des amas de leur graine est un ensemble de cardinalité  $n - 1$ .

**Exemple 4.7.**

$$\begin{array}{lll}
 G = & x_1 \longrightarrow x_2 & X = \{x_1, x_2\} \\
 \\
 \mu_1(G) = & \frac{1+x_2}{x_1} \longleftarrow x_2 & \mu_1(X) = \left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, x_2 \right\} \\
 \\
 \mu_2(G) = & x_1 \longleftarrow \frac{1+x_1}{x_2} & \mu_2(X) = \left\{ x_1, \frac{1+x_1}{x_2} \right\} \\
 \\
 \mu_2\mu_1(G) = & \frac{1+x_2}{x_1} \longrightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} & \mu_2\mu_1(X) = \left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \right\} \\
 \\
 \mu_1\mu_2(G) = & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \longrightarrow \frac{1+x_1}{x_2} & \mu_1\mu_2(X) = \left\{ \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}, \frac{1+x_1}{x_2} \right\} \\
 \\
 \mu_1\mu_2\mu_1(G) = & \frac{1+x_1}{x_2} \longleftarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} & \mu_1\mu_2\mu_1(X) = \left\{ \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \right\}
 \end{array}$$

Les graines  $\mu_1\mu_2(G)$  et  $\mu_1\mu_2\mu_1(G)$  sont identiques, elles correspondent donc au même point dans le graphe d'échange. Cet exemple permet de constater qu'il n'existe que 5 graines différentes pouvant être obtenues à partir de la graine  $G$ . On a donc le graphe d'échange qui suit :



*Remarque 4.8.* Dans une algèbre amassée donnée, l'amas définit la graine, voir [GSV07]. Ainsi, nous pouvons affirmer sans perte de généralité que les points du graphe d'échange de  $G = (Q, X)$  correspondent aux amas obtenus par mutations successives sur  $X$ .

### 4.3 Application des relations de mutations dans le graphe d'échange

Avant d'énoncer l'un des deux théorèmes principaux de cette section, généralisons aux graines la proposition 3.1, soit que  $\mu_i\mu_j(Q) = \mu_j\mu_i(Q)$  lorsqu'il n'y a pas de flèche entre  $i$  et  $j$  dans un carquois  $Q$ .

**Proposition 4.9.** *Soit une graine  $G = (Q, X)$  et  $i, j$  deux points de  $Q$  tels qu'il n'y ait pas de flèche entre  $i$  et  $j$ . Alors,  $\mu_j\mu_i(X) = \mu_i\mu_j(X)$ .*

*Démonstration.* La démonstration est évidente puisque les mutations  $\mu_i$  et  $\mu_j$  sont indépendantes.  $\square$

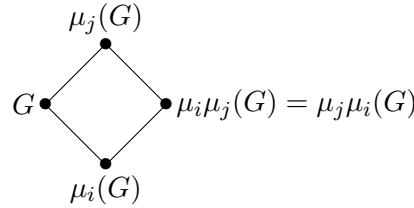
**Théorème 4.10.** *Soit  $G = (Q, X)$  une graine telle qu'il n'y ait pas de flèche entre deux points  $i$  et  $j$  de  $Q$ . Alors  $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$ .*

*Démonstration.* Grâce à la proposition 3.1 nous savons que les carquois  $\mu_i\mu_j(Q)$  et  $\mu_j\mu_i(Q)$  sont égaux et grâce à la proposition 4.9 nous savons que les amas  $\mu_i\mu_j(X)$  et  $\mu_j\mu_i(X)$  sont égaux. Ainsi, cela implique que les graines sont égales, car elles ont le même carquois et le même amas.  $\square$

Le théorème qui suit énonce l'application du théorème 4.10 aux graphes d'échange.

**Théorème 4.11.** *Soit  $G = (Q, X)$  une graine telle qu'il n'y ait pas de flèche entre deux points  $i$  et  $j$  de  $Q$ .*

*Les points associés aux graines  $G, \mu_i(G), \mu_j(G), \mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$  forment un quadrilatère, qui correspond à un sous-graphe plein du graphe d'échange, comme suit :*



*Démonstration.* Pour qu'un tel quadrilatère se retrouve dans le graphe d'échange, il faut que les quatre points soient associés à quatre graines différentes. Comme l'amas définit la graine, il suffit que les quatres points soient associés à quatre amas différents.

Voici toutes les paires de graines possibles où nous devons vérifier si leur amas sont distincts :

- $G$  et  $\mu_j(G)$
- $G$  et  $\mu_i(G)$
- $\mu_j(G)$  et  $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$
- $\mu_i(G)$  et  $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$
- $G$  et  $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$
- $\mu_j(G)$  et  $\mu_i(G)$

Supposons que  $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\}$  et  $i \neq j$ .

Alors, on a que  $\mu_i(X) = \{x_1, \dots, x_i', \dots, x_j, \dots, x_n\}$ .

Or,  $x_i \neq x_i'$  et donc  $X \neq \mu_i(X)$ . Cela implique que  $G$  et  $\mu_j(G)$ ,  $G$  et  $\mu_i(G)$ ,  $\mu_j(G)$  et  $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$  et  $\mu_i(G)$  et  $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$  ne peuvent être le même amas.

De plus, on a que  $\mu_i\mu_j(X) = \{x_1, \dots, x_i', \dots, x_j', \dots, x_n\}$ . Pour que  $\mu_i\mu_j(X)$  et  $X$  correspondent au même amas, il y a deux cas à considérer. Dans le premier, il faudrait que  $x_i = x_i'$  et  $x_j = x_j'$  et dans le deuxième, il faudrait que  $x_i = x_j'$  et  $x_j = x_i'$ . Or, on sait que  $x_i \neq x_i'$ , il suffit de s'assurer que  $x_i \neq x_j'$  ou que  $x_j \neq x_i'$  pour montrer qu'il s'agit de deux amas différents.

Supposons que  $x_j = x_i'$ . Alors, l'amas  $\mu_i(X) = \{x_1, \dots, x_i', \dots, x_j, \dots, x_n\}$  contient deux variables identiques. Or cela est impossible, on en déduit que  $G$  et  $\mu_i\mu_j(G) = \mu_j\mu_i(G)$  ne peuvent être le même amas.

De même, on trouve que  $\mu_j(G)$  et  $\mu_i(G)$  ne peuvent être le même amas.

Ainsi, les 4 amas sont bien distincts dans le graphe d'échange et forment un quadrilatère. □

Généralisons maintenant aux graines le théorème 3.2 introduit dans la section 3, soit que  $\mu_j\mu_i\mu_j(Q) \cong \mu_j\mu_i(Q)$  lorsqu'il y a une unique flèche entre  $i \rightarrow j$  dans un carquois  $Q$ . Commençons par démontrer l'égalité des amas.

Tout d'abord, notons les six graines suivantes :

$$\begin{aligned}
 g_1 &= (Q, X), & \text{où } X &= \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\} \\
 g_2 &= (\mu_j(Q), \mu_j(X)), & \text{où } \mu_j(X) &= \{x_1, \dots, x_i, \dots, y_j, \dots, x_n\} \\
 g_3 &= (\mu_i\mu_j(Q), \mu_i\mu_j(X)), & \text{où } \mu_i\mu_j(X) &= \{x_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, x_n\} \\
 g_4 &= (\mu_j\mu_i\mu_j(Q), \mu_j\mu_i\mu_j(X)), & \text{où } \mu_j\mu_i\mu_j(X) &= \{x_1, \dots, y_i, \dots, z_j, \dots, x_n\} \\
 g_5 &= (\mu_i(Q), \mu_i(X)), & \text{où } \mu_i(X) &= \{x_1, \dots, z_i, \dots, x_j, \dots, x_n\} \\
 g_6 &= (\mu_j\mu_i(Q), \mu_j\mu_i(X)), & \text{où } \mu_j\mu_i(X) &= \{x_1, \dots, z_i, \dots, w_j, \dots, x_n\}
 \end{aligned}$$

*Remarque 4.12.* Dans cette section, les monômes  $M_k(g)$  et  $W_k(g)$  font référence non pas à l'amas de départ comme dans la section 3, mais à l'amas auquel la graine  $g$  est rattachée. De cette façon, il est possible de différencier une variable  $x_k$  d'une variable  $x_k' = \mu_k(x_k)$ .

Les variables  $y_j, y_i, z_j, z_i$  et  $w_j$  sont définies comme suit :

$$y_j = \frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j} \quad (2)$$

$$y_i = \frac{M_i(g_2) + W_i(g_2)}{x_i} \quad (3)$$

$$z_j = \frac{M_j(g_3) + W_j(g_3)}{y_j} \quad (4)$$

$$z_i = \frac{M_i(g_1) + W_i(g_1)}{x_i} \quad (5)$$

$$w_j = \frac{M_j(g_5) + W_j(g_5)}{x_j}. \quad (6)$$

Introduisons maintenant des égalités que nous allons utiliser pour la démonstrations des prochains lemmes.

Les lemmes 3.8, 3.12, 3.13 et 3.14 nous permettent d'établir les relations suivantes (en tenant compte de la flèche entre  $i$  et  $j$  cette fois) :

$$M_j(g_3) = \text{CouF}_{(i,j)}(g_1) \cdot y_i \quad (7)$$

$$W_j(g_3) = \frac{M_j(g_1)}{x_i} \cdot \frac{W_i(g_1)}{x_j} \quad (8)$$

$$M_j(g_5) = \frac{M_j(g_1)}{x_i} \cdot \frac{M_i(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \quad (9)$$

$$W_j(g_5) = \frac{W_j(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \cdot z_i. \quad (10)$$

Les relations suivantes se trouvent de façon évidente puisqu'elles découlent d'une seule mutation :

$$M_i(g_2) = \frac{M_i(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \cdot y_j \quad (11)$$

$$W_i(g_2) = \frac{W_i(g_1)}{x_j} \cdot \frac{W_j(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}. \quad (12)$$

**Lemme 4.13.** *Soit  $G = (Q, X)$  une graine et  $i, j$  deux points tels qu'il y ait une seule flèche de  $i$  vers  $j$  dans  $Q$ . Alors, si on note l'amas  $\mu_j \mu_i \mu_j(X) = \{x_1, \dots, y_i, \dots, z_j, \dots, x_n\}$  et l'amas  $\mu_j \mu_i(X) = \{x_1, \dots, z_i, \dots, w_j, \dots, x_n\}$ , on a  $y_i = w_j$ .*

*Démonstration.* En utilisant les égalités (2), (3), (11) et (12), on peut développer le terme  $y_i$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{M_i(g_2) + W_i(g_2)}{x_i} \\ &= \frac{\frac{M_i(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \cdot y_j + \frac{W_i(g_1)}{x_j} \cdot \frac{W_j(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}}{x_i} \\ &= \frac{\frac{M_i(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \cdot \left( \frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j} \right) + \frac{W_i(g_1) \cdot W_j(g_1)}{x_j \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}}{x_i} \\ &= \frac{M_i(g_1) \cdot M_j(g_1) + M_i(g_1) \cdot W_j(g_1) + W_i(g_1) \cdot W_j(g_1)}{x_i \cdot x_j \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}. \end{aligned}$$

De la même façon, en utilisant les égalités (5), (6), (9) et (10), on peut développer le terme  $w_j$  ainsi :

$$\begin{aligned}
w_j &= \frac{M_j(g_5) + W_j(g_5)}{x_j} \\
&= \frac{\frac{M_i(g_1) \cdot M_j(g_1)}{x_i \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} + \frac{W_j(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \cdot z_i}{x_j} \\
&= \frac{\frac{M_i(g_1) \cdot M_j(g_1)}{x_i \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} + \frac{W_j(g_1)}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} \cdot \frac{M_i(g_1) + W_i(g_1)}{x_i}}{x_j} \\
&= \frac{M_i(g_1) \cdot M_j(g_1) + M_i(g_1) \cdot W_j(g_1) + W_i(g_1) \cdot W_j(g_1)}{x_i \cdot x_j \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}.
\end{aligned}$$

Comme les deux expressions sont égales, on a  $y_i = w_j$ .  $\square$

**Lemme 4.14.** Soit  $G = (Q, X)$  une graine et  $i, j$  deux points tels qu'il y ait une seule flèche de  $i$  vers  $j$  dans  $Q$ . Alors, si l'on note l'amas  $\mu_j \mu_i \mu_j(X) = \{x_1, \dots, y_i, \dots, z_j, \dots, x_n\}$  et l'amas  $\mu_j \mu_i(X) = \{x_1, \dots, z_i, \dots, w_j, \dots, x_n\}$ , on a  $z_j = z_i$ .

*Démonstration.* En utilisant les égalités (2), (3), (4), (5), (7), (8), (11) et (12), on peut démontrer le lemme ainsi :

$$\begin{aligned}
z_j &= \frac{M_j(g_3) + W_j(g_3)}{y_j} \\
&= \frac{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1) \cdot y_i + \frac{M_j(g_1)}{x_i} \cdot \frac{W_i(g_1)}{x_j}}{y_j} \\
&= \frac{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1) \cdot \left( \frac{M_i(g_2) + W_i(g_2)}{x_i} \right) + \frac{M_j(g_1) \cdot W_i(g_1)}{x_i \cdot x_j}}{\frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j}} \\
&= \frac{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1) \cdot \left( \frac{\frac{M_i(g_1) \cdot y_j}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1)} + \frac{W_i(g_1) \cdot W_j(g_1)}{x_j \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}}{x_i} \right) + \frac{M_j(g_1) \cdot W_i(g_1)}{x_i \cdot x_j}}{\frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j}} \\
&= \frac{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1) \cdot \left( \frac{\frac{M_i(g_1) \cdot (M_j(g_1) + W_j(g_1))}{\text{CouF}_{(i,j)}(g_1) \cdot x_j} + \frac{W_i(g_1) \cdot W_j(g_1)}{x_j \cdot \text{CouF}_{(i,j)}(g_1)}}{x_i} \right) + \frac{M_j(g_1) \cdot W_i(g_1)}{x_i \cdot x_j}}{\frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\frac{M_i(g_1) \cdot (M_j(g_1) + W_j(g_1))}{x_j} + \frac{W_i(g_1) \cdot W_j(g_1)}{x_j}}{x_i} \right) + \frac{M_j(g_1) \cdot W_i(g_1)}{x_i \cdot x_j} \\
= & \frac{\frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j}}{\frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j}} \\
= & \frac{\frac{M_i(g_1) \cdot (M_j(g_1) + W_j(g_1)) + W_i(g_1) \cdot W_j(g_1) + M_j(g_1) \cdot W_i(g_1)}{x_i \cdot x_j}}{\frac{M_j(g_1) + W_j(g_1)}{x_j}} \\
= & \frac{M_i(g_1) \cdot M_j(g_1) + M_i(g_1) \cdot W_j(g_1) + W_i(g_1) \cdot W_j(g_1) + M_j(g_1) \cdot W_i(g_1)}{x_i \cdot (M_j(g_1) + W_j(g_1))} \\
= & \frac{M_i(g_1) + W_j(g_1)}{x_i} \\
= & z_i.
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.15.** Soit  $G = (Q, X)$  une graine et  $i, j$  deux points de  $Q$  tels qu'il y ait une unique flèche  $i \rightarrow j$ .

Alors,  $\mu_j \mu_i(X) = \mu_j \mu_i \mu_j(X)$ .

*Démonstration.* Les amas  $\mu_j \mu_i \mu_j(X) = \{x_1, \dots, y_i, \dots, z_j, \dots, x_n\}$  et  $\mu_j \mu_i(X) = \{x_1, \dots, z_i, \dots, w_j, \dots, x_n\}$  partagent toutes leurs variables, sauf celles associées à  $i$  et à  $j$ . Les lemmes 4.13 et 4.14 démontrent que  $y_i = w_j$  et que  $z_j = z_i$ . Ainsi, les deux amas ont exactement les mêmes éléments et sont donc égaux. □

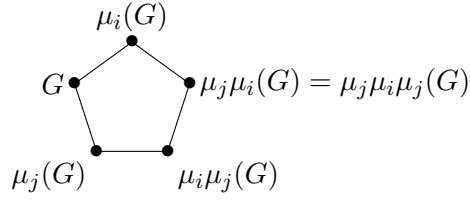
**Théorème 4.16.** Soit  $G = (Q, X)$  une graine et  $i, j$  deux points de  $Q$  tels qu'il y ait une unique flèche  $i \rightarrow j$ . Alors  $\mu_j \mu_i(G) = \mu_j \mu_i \mu_j(G)$

*Démonstration.* Avec le théorème 3.2 nous savons que les carquois  $\mu_j \mu_i(Q)$  et  $\mu_j \mu_i \mu_j(Q)$  sont isomorphes et avec la proposition 4.15 nous avons que les amas  $\mu_j \mu_i(X)$  et  $\mu_j \mu_i \mu_j(X)$  sont les mêmes. Ainsi, les graines  $\mu_j \mu_i(G)$  et  $\mu_j \mu_i \mu_j(G)$  sont les mêmes, puisqu'elles ont le même carquois et le même amas. On remarque aussi que dans l'isomorphisme des carquois les points  $i$  et  $j$  sont permutés et qu'on retrouve le même phénomène pour les variables reliées à  $i$  et à  $j$  pour les amas. □

Le théorème qui suit énonce l'application du théorème 4.16 aux graphes d'échange.

**Théorème 4.17.** Soit  $G = (Q, X)$  une graine et  $i, j$  deux points de  $Q$  tel qu'il y ait une unique flèche  $i \rightarrow j$ .

Les points associés aux graines  $G, \mu_i(G), \mu_j(G), \mu_j \mu_i(G) = \mu_j \mu_i \mu_j(G)$  et  $\mu_i \mu_j(G)$  forment un pentagone, qui correspond à un sous-graphe plein du graphe d'échange, comme suit :



*Démonstration.* Pour qu'un tel pentagone se retrouve dans le graphe d'échange, il faut que les cinq points soient associés à cinq amas différents.

Voici toutes les paires de graines possibles pour lesquelles nous devons vérifier si leur amas sont distincts :

- $G$  et  $\mu_j(G)$
- $G$  et  $\mu_i(G)$
- $G$  et  $\mu_i\mu_j(G)$
- $G$  et  $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_j(G)$  et  $\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_j(G)$  et  $\mu_i(G)$
- $\mu_j(G)$  et  $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_i(G)$  et  $\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_i(G)$  et  $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_i\mu_j(G)$  et  $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$ .

Les paires de graines suivantes ne peuvent avoir le même amas puisqu'elles sont reliées par une seule mutation (voir la démonstration pour le quadrilatère) :

- $G$  et  $\mu_j(G)$
- $G$  et  $\mu_i(G)$
- $\mu_i(G)$  et  $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_i\mu_j(G)$  et  $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_j(G)$  et  $\mu_i\mu_j(G)$ .

De plus, les paires suivantes ne peuvent avoir le même amas puisque si c'était le cas, au moins un autre amas contiendrait 2 variables amassées identiques (voir la démonstration pour le quadrilatère) :

- $G$  et  $\mu_i\mu_j(G)$
- $G$  et  $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$
- $\mu_j(G)$  et  $\mu_i(G)$ .

Il reste alors 2 paires de graines à vérifier. Commençons par  $\mu_i(G)$  et  $\mu_i\mu_j(G)$ .

*Remarque 4.18.* Il est important de mentionner que comme il y a une flèche entre  $i$  et  $j$ , la mutation  $\mu_i$  donnera des variables différentes en fonction de l'amas sur lequel on mute. Par exemple, la nouvelle variable obtenue lors de  $\mu_i(G)$  n'est pas la même que celle obtenue lors de  $\mu_i\mu_j(G)$ .

Supposons que  $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\}$  et  $i \neq j$ . Alors, on a que  $\mu_i(X) = \{x_1, \dots, x_i', \dots, x_j, \dots, x_n\}$  et  $\mu_i\mu_j(X) = \{x_1, \dots, x_i'', \dots, x_j', \dots, x_n\}$ . Pour que ces amas soient égaux, il faut soit que  $x_i' = x_i''$  et  $x_j = x_j'$ , soit que  $x_i' = x_j'$  et que  $x_j = x_i''$ . Or,  $x_j \neq x_j'$ , alors le premier cas est impossible.

Supposons que  $x_i' = x_j'$ . Alors, l'amas  $\mu_j(X)$  contient les variables  $x_i$  et  $x_j' = x_i'$ . Or, il est impossible qu'un amas contienne ces deux variables en même temps si celui-ci n'a subi qu'une seule mutation au point  $j$ . En effet, cela voudrait dire que  $x_i' = \mu_j(x_i) = \mu_i(x_i)$  et donc que  $j = i$ . Il y a donc une contradiction.

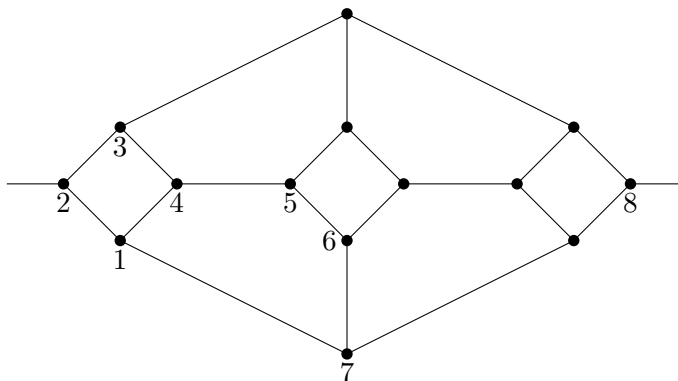
De façon analogue, on trouve que  $\mu_j(G)$  et  $\mu_j\mu_i(G) \cong \mu_j\mu_i\mu_j(G)$  ne peuvent pas être le même amas.

Ainsi, les cinq amas sont bien distincts dans le graphe d'échange et forment un pentagone.

□

#### 4.4 Exemple

Dans cet exemple, prenons la graine  $G = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$ . Alors, le graphe d'échange de  $G$  est :



Ce graphe d'échange est un polyèdre de  $\mathbb{R}^3$ , voir [BDP12]. Il y a donc identification entre le segment quittant le sommet 2 vers la gauche et celui quittant le sommet 8 vers la droite.

On peut voir que dans ce graphe d'échange, il y a des quadrilatères et des pentagones. Ainsi, le point 1 du graphe est relié à une graine telle que son carquois n'a pas de flèches entre deux points  $a$  et  $b$ , ce qui donne un quadrilatère, formé des points 1, 2, 3 et 4, lorsqu'on mute sur ces deux points, et a une unique flèche entre deux points  $b$  et  $c$ , ce qui donne un pentagone, formé des points 1, 4, 5, 6 et 7, lorsque l'on mute sur ces deux points.

## Références

- [BDP12] T. BRÜSTLE, G. DUPONT et M. PÉROTIN : On Maximal Green Sequences. *ArXiv e-prints*, mai 2012.



- [FZ01] S. FOMIN et A. ZELEVINSKY : Cluster algebras I : Foundations. *ArXiv Mathematics e-prints*, avril 2001.
- [GSV07] M. GEKHTMAN, M. SHAPIRO et A. VAINSHTEIN : On the properties of the exchange graph of a cluster algebra. *ArXiv Mathematics e-prints*, mars 2007.

CATHERINE MASSON  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
*Courriel:* `catherine.masson@USherbrooke.ca`

JEAN-PHILIPPE MORISSETTE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
*Courriel:* `jean-philippe.morissette@USherbrooke.ca`