CaMUS **6**, 1 – 11

Itérations d'un processus avec mémoire défini par l'application tente

Mathieu Frappier

Reçu le 2016-06-27 et accepté le 2016-10-02

Résumé Dans cet article, on étudie le processus avec mémoire défini par : $x_{n+1} = f(\alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1})$ où f est l'application tente, $0 < \alpha < 1$ et $x_i \in [0,1]$. On voit que dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$, tous les points sont de période trois ou le seront éventuellement sauf pour deux points fixes. On termine en présentant des conjectures énoncées par P. Góra dont certaines qui ne sont pas prouvées actuellement pour $\alpha \neq \frac{1}{2}$.

1 Introduction

L'étude des systèmes dynamiques intéresse les mathématiciens depuis le dix-septième siècle. Au départ, Isaac Newton s'y intéressait pour décrire des processus qui évoluent dans le temps. Ils étaient souvent modélisés par des équations différentielles. Au fil des siècles, certains mathématiciens ont fait des découvertes importantes. Par exemple, en 1963 Edward Lorenz a modélisé des phénomènes météorologiques à l'aide d'un système d'équations différentielles. Il a découvert ce que l'on appelle l'attracteur de Lorenz. Cet attracteur chaotique a donné naissance à l'effet papillon. Ce concept n'a pas seulement été apprécié par les mathématiciens mais par la population en général.

Aujourd'hui, on peut rapidement calculer les itérations d'une fonction et on peut aussi visualiser facilement l'évolution d'un système avec les nouvelles technologies. Bien qu'on possède ces outils, l'étude des systèmes dynamiques est toujours pertinente : On peut y trouver des applications dans plusieurs domaines dont en physique, en écologie, en finance, etc.

2 Définitions

Commençons par énoncer quelques définitions élémentaires tirées des livres de Devaney [Dev92], [Dev03] et reprises dans [Rob95].

Je tiens à remercier le CRSNG pour son financement et M. Tomasz Kaczynski professeur à l'Université de Sherbrooke pour la supervision de mon stage de recherche et pour l'aide qu'il a apportée à la rédaction de cet article.

Définition 2.1. Un *système dynamique* est un ensemble de composants en interaction. Il est souvent régi par un système d'équations différentielles décrivant leur mouvement.

Dans notre cas, le système dynamique étudié est la suite d'itérations d'une fonction.

Intéressons nous à la fonction $F(x) = 2\cos(x+3)$. Notons sa deuxième itération $F^2(x) = 2\cos(2\cos(x+3)+3)$ et sa troisième itération $F^3(x) = 2\cos(2\cos(2\cos(x+3)+3)+3)$. En général, on note $F^n(x)$ la n-ième itération de $F(x)$. Prendre note que l'exposant ne signifie pas que l'on prend la n-ième puissance de $F(x)$ ni sa n-ième dérivée.

Définition 2.2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit l'*orbite* de x_0 sur F comme la suite de points x_0, $x_1 = F(x_0)$, $x_2 = F^2(x_0), \ldots, x_n = F^n(x_0), \ldots$
Le point x_0 est appelé la *graine* de l'*orbite*.

Définition 2.3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 est un *point fixe* de $F \Leftrightarrow F(x_0) = x_0$.

Définition 2.4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 est un *point éventuellement fixe* de

$$F \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

tel que

$$F^n(x_0) = F^{n+1}(x_0).$$

Définition 2.5. Un *cycle* est une orbite telle que pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $F^n(x_0) = x_0$ avec $n > 0$. La plus petite valeur de n est appelée la *période*.

Exemple 2.6. Soit $F(x) = -x^2+3x+4$, on choisit $x_0 = -1$. Calculons l'orbite de x_0. $x_1 = F(x_0) = 0$, $x_2 = F(x_1) = 4$, $x_3 = F(x_2) = 0$. Donc ici, l'orbite de x_0 est la suite -1, 0, 4, 0, 4, 0,... Elle devient cyclique de période deux.

3 Étude du système

Dans cette section, on présente la solution à un problème qui à été soumis par M. Pawel Góra, professeur à l'Université Concordia, lors de la réunion de la Société mathématique du Canada en juin 2015. J'y ai travaillé lors d'un stage de recherche supervisé par M. Tomasz Kaczynski. M. Góra et ses collègues ont aussi apporté des solutions de leur côté [GBLP16]. Le problème est :

Pour une certaine valeur $0 < \alpha < 1$, on considère le processus avec mémoire défini par $x_{n+1} = f(\alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1})$. On dit que x_0 est l'état initial. x_n représente l'état actuel du processus, x_{n-1} représente sa plus récente valeur passée et x_{n+1} représente sa prochaine valeur future. Plus précisément, on s'intéresse au cas où f est l'application tente.

$$f(x) = \begin{cases} \mu x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \mu(1-x) & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

On choisi cette application car elle possède plusieurs propriétés intéressantes dans l'étude des systèmes dynamiques chaotiques. En particulier, on peut prouver qu'il existe des cycles de période n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On prend $\mu = 2$ pour simplifier les calculs et on remarque que le système se comporte de manière très différente selon le paramètre α. La prochaine tâche est de montrer que pour $\alpha = \frac{1}{2}$, la suite des itérations de x_n sera éventuellement de période trois sauf pour $x_n = 0$ et $x_n = \frac{2}{3}$.

Pour ce faire, on pose la fonction G et on regarde ses itérations.

$$\begin{array}{rccc} G & : & [0{,}1]^2 & \to & [0{,}1]^2 \\ & & G(x{,}y) & \mapsto & (y, f(\alpha y + (1-\alpha)x)) \end{array}$$

$$(x_n, y_n) = G(x_{n-1}, y_{n-1}) \Leftrightarrow x_n = y_{n-1}$$

et

$$\begin{aligned} y_n &= f(\alpha y_{n-1} + (1-\alpha)x_{n-1}) \\ &= f(\alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}) \end{aligned}$$

mais

$$x_{n+1} = y_n \Rightarrow x_{n+1} = f(\alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}).$$

Donc, le problème initial est équivalent aux itérations de l'application G. Ils vont se comporter de manière semblable. L'avantage avec la fonction G est qu'il est possible de passer d'un problème de degré deux dans $\mathbb{R}$ à un problème de degré un dans $\mathbb{R}^2$.

Par la suite, posons : $\alpha = \frac{1}{2}$, $v_0 = (x_0, y_0)$ avec $v_0 \in [0{,}1]^2$. Notons $v_1 = G(v_0)$, $v_2 = G(v_1) = G^2(v_0), \ldots, v_n = (x_n, y_n) = G^n(v_0)$. On constate que si $x_i + y_i < 1$, on prend $f(x) = 2x$ dans l'application tente. Sinon on choisit $f(x) = 2(1-x)$.

Remarquons aussi que (0,0) est un point fixe. C'est-à-dire que pour $v = (0{,}0)$, on a $G(v) = (0{,}0)$. Commençons par montrer les propositions suivantes.

Proposition 3.1. *Si $x_i + y_i \geq 1$, alors $x_{i+n} + y_{i+n} \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Si $x_i + y_i \geq 1$, on a $\frac{x_i + y_i}{2} \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(v_i) &= \left(y_i, f\left(\frac{1}{2}y_i + \frac{1}{2}x_i\right)\right) \\ &= (y_i, 2 - (x_i + y_i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_{i+1} + y_{i+1} &= y_i + 2 - (x_i + y_i) \\ &= 2 - x_i \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2. *Soit $v_0 \neq (0, 0)$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si $x_n + y_n < 1$ et $1 \leq i \leq n$ alors $x_i + y_i < x_{i+1} + y_{i+1}$.*

Démonstration. Soit $v_0 \neq (0,0)$ tel que $x_i + y_i < 1$ $\forall i = 0, 1, \ldots, n$. On a que

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, n$$

par la définition de G lorsque $x_i + y_i < 1$. Donc, on a que

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{i+1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, n.$$

On observe par récurrence que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{i+1} = \begin{bmatrix} F_i & F_{i+1} \\ F_{i+1} & F_{i+2} \end{bmatrix} \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Où F_i est le i-ième terme de la suite de Fibonacci. On rappelle que la suite de Fibonacci est définie comme étant :

$$F_{i+2} = F_{i+1} + Fi, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad i \geq 0.$$

Pour $i = 1$, le résultat est trivial. On suppose que c'est vérifié pour tout i tel que $i = 0, 1, \ldots, n$. On a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{(i+1)+1} = \begin{bmatrix} F_i & F_{i+1} \\ F_{i+1} & F_{i+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{i+1} & F_{(i+1)+1} \\ F_{(i+1)+1} & F_{(i+1)+2} \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i & F_{i+1} \\ F_{i+1} & F_{i+2} \end{bmatrix} \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Donc,

$$(x_{i+1} + y_{i+1}) - (x_i + y_i) = F_i x_0 + F_{i+1} y_0.$$

D'où

$$(x_{i+1} + y_{i+1}) - (x_i + y_i) > 0 \ \forall i = 0, 1, \ldots, n \text{ si } y_0 > 0$$

et

$$(x_{i+1} + y_{i+1}) - (x_i + y_i) > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n \text{ si } y_0 = 0$$

car dans ce cas $x_0 > 0$. □

Remarque 3.3. Pour la proposition 3.2, on doit prendre $i \geq 1$ car dans le cas où $y_0 = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} G(v_0) &= G((x_0, 0)) \\ &= \left(0, f\left(\frac{1}{2} x_0\right)\right) \\ &= (0, x_0) \\ &= v_1. \end{aligned}$$

Alors, $x_0 + y_0 = x_1 + y_1 = x_0$. Par contre, dès la prochaine itération on a bien $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$.

Proposition 3.4. *Pour tout $v_0 \neq (0,0)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n + y_n \geq 1$*

Démonstration. Le résultat est trivial par la Proposition 3.2. La suite de Fibonacci tend vers l'infini, alors on prend n aussi grand qu'on veut. □

Remarque 3.5. Lorsqu'on atteint n tel que $x_n + y_n \geq 1$, il n'est plus possible de se servir de la suite de Fibonacci pour définir x_{n+1}.

Les Figures 1 et 2 montrent qu'après un certain nombre d'itérations le système passe au-dessus de la droite $x + y = 1$.

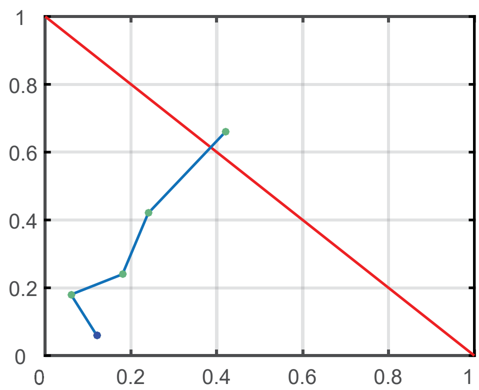


Figure 1 – Itérations du point (0,12 ; 0,06). Après quatre itérations le système passe au-dessus de la droite $x + y = 1$.

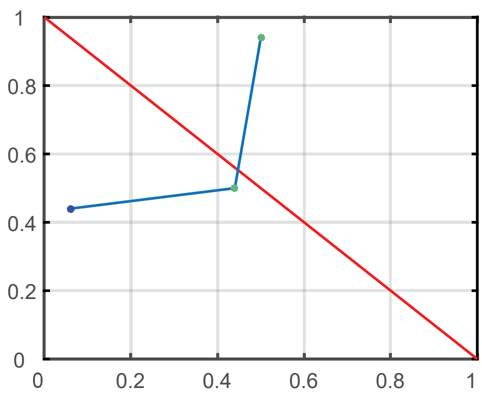


Figure 2 – Itérations du point (0,06 ; 0,44). Ici, après deux itérations le système passe au-dessus de la droite $x + y = 1$.

Jusqu'à maintenant, on sait que tous les points sous la droite $x + y = 1$ dans $[0,1]^2$ atteindront celle-ci ou passeront au-dessus après un nombre d'itérations assez grand sauf pour le cas du point $(0,0)$. De plus, une fois au-dessus de la droite il est impossible qu'une itération retourne sous celle-ci. Il ne reste plus qu'à itérer les points $(x_i, y_i) \in [0,1]^2$ tels que $x_i + y_i \geq 1$.

Soit $v_0 = (x_0, y_0)$ tel que $x_0 + y_0 \geq 1$.

$$v_1 = G(v_0) = (y_0, 2 - (x_0 + y_0))$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \left(2 - (x_0 + y_0), f\left(\frac{2 - x_0}{2}\right)\right) \\ &= (2 - (x_0 + y_0), x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= \left(x_0, f\left(\frac{2 - y_0}{2}\right)\right) \\ &= (x_0, y_0) \\ &= v_0. \end{aligned}$$

On vérifie que 3 est le plus petit n tel que $G^n(v_0) = v_0$.

$$\begin{aligned} v_0 = G(v_0) &\Leftrightarrow (x_0, y_0) = (y_0, 2 - (x_0 + y_0)) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ y_0 = 2 - (x_0 + y_0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_0 = 2(1 - y_0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_0 = y_0 = \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow v_0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ est un point fixe.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0 = G^2(v_0) &\Leftrightarrow (x_0, y_0) = (2 - (x_0 + y_0), x_0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0 \\ x_0 = 2 - (x_0 + y_0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_0 = y_0 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Donc les points au-dessus de la droite $x + y = 1$ sont tous de périodes trois sauf pour le point fixe $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

La Figure 3 montre un exemple de point qui une fois que le système passe au-dessus de la droite $x + y = 1$, il devient de période trois.

Proposition 3.6. *Les seuls points éventuellement fixes à* $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ *sont* $\left(\frac{2}{3},0\right)$ *et* $\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

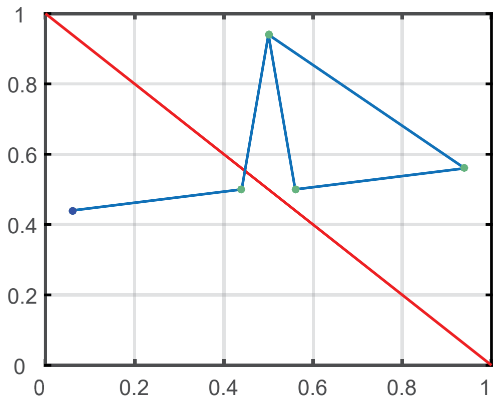


Figure 3 – Dans la Figure 2, on itère deux fois le point $x_0 = (0{,}06; 0{,}44)$ et on termine au point $(0{,}5; 0{,}94)$. Ici, on itère trois fois de plus et on termine encore au point $(0{,}5; 0{,}94)$.

Démonstration. Soit $v = (x, y)$.
Cas $x + y \geq 1$:

$$\begin{aligned} G(v) = (y, 2-(x+y)) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ 2-(x+y) = \frac{2}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow \text{Pas de point éventuellement fixe} \\ &\quad\ \text{pour } x + y \geq 1. \end{aligned}$$

Cas $x + y < 1$:

$$\begin{aligned} G(v) = (y, x+y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x+y = \frac{2}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow v = \left(0, \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Préimage de $\left(0, \frac{2}{3}\right)$:

$$\begin{aligned} G(v) = \left(0, \frac{2}{3}\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x+y = \frac{2}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow v = \left(\frac{2}{3}, 0\right). \end{aligned}$$

Préimage de $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$:

$$G(v) = \left(\frac{2}{3}, 0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x + y = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow v = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Ce qui est une contradiction car $v \in [0,1]^2$. □

4 Conclusion

Comme on a montré au début que la fonction G et le système initial défini par $x_{n+1} = f(\alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1})$ sont équivalents, on en tire la même conclusion. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a deux uniques points fixes en $(0,0)$ et $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. On a deux points éventuellement fixes à $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ soient $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ et $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Tous les autres points $(x,y) \in [0,1]^2$ sont de période trois ou le seront éventuellement.

D'autres conjectures pour $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ne sont toujours pas démontrées et certaines l'ont été [GBLP16]. D'abord, avant de les énoncer, nous devons observer quelques définitions tirées de [Bog07].

Définition 4.1. Une *tribu* ou *σ-algèbre* $\mathcal{A}$ sur un ensemble X est un ensemble tel que :

1. $\mathcal{A} \neq \varnothing$
2. $\forall B \in \mathcal{A}$, $B^c \in \mathcal{A}$, où $B \in X$ et B^c est le complémentaire de B dans X
3. si $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.

Définition 4.2. Une paire $(X,\mathcal{A})$ telle que X est un ensemble et $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre des sous-ensembles de X est un *espace mesurable.*

Définition 4.3. Soit $(X,\mathcal{A})$, un espace mesurable. Une application μ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ est une *mesure* si :

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. μ est *σ-additive.* C'est-à-dire que si $E_1, E_2, \ldots$ est une famille dénombrable de parties de X appartenant à $\mathcal{A}$ et si ces parties sont deux à deux disjointes, alors on a $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

Définition 4.4. Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(X,\mathcal{A})$. On dit que ν est *absolument continue* par rapport à μ si et seulement si pour tout A tel que A est une partie de X et $A \in \mathcal{A}$ on a $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.

Remarque 4.5. Si X est une partie de $\mathbb{R}^2$, ce qui est le cas ici, la mesure μ par défaut est la mesure de Lebesgue qui compte l'aire de surface d'un ensemble [Bog07]. Alors, une autre mesure ν sur X est dite absolument continue si elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Définition 4.6. Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : X \to X$ une fonction mesurable. Une mesure μ sur $(X,\mathcal{A})$ est dite *invariante* sur f si pour tout A tel que A est une partie de X et $A \in \mathcal{A}$ on a $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$. Donc, une mesure est *invariante* si elle est préservée par une fonction.

Après ces quelques définitions, tout est en place pour pouvoir énoncer d'autres conjectures sur le système étudié.

1. Pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ l'application G conserve une mesure invariante absolument continue.

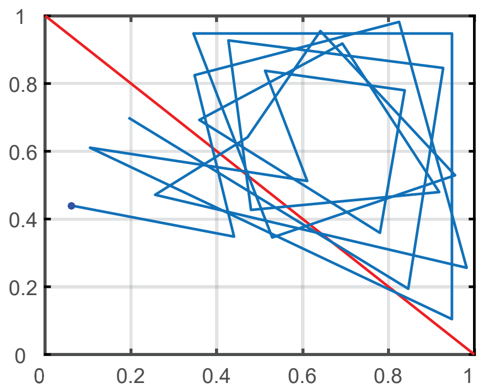


Figure 4 – 25 itérations du point $(0{,}06; 0{,}44)$ avec $\alpha = 0{,}3$.

2. Pour $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$, le point $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ est un attracteur global.

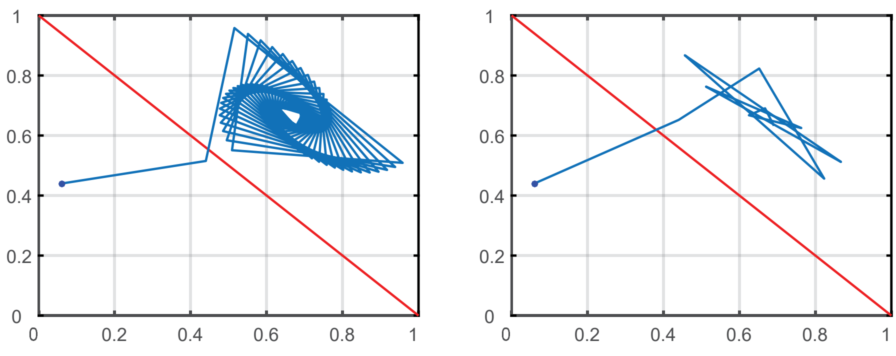


Figure 5 – Itérations du point $(0{,}06; 0{,}44)$ avec $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$.

Cette conjecture a été prouvée.

Les tests effectués avec d'autres points choisis au hasard semblent aussi vouloir montrer que la convergence est plus rapide lorsque α est proche de $\frac{3}{4}$.

3. Pour $\alpha = \frac{3}{4}$, tous les points sur la droite $x + y = \frac{4}{3}$ sont de période deux sauf pour le point fixe $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Tous les autres points $(x,y) \in [0,1]^2$ tels que $x + y \neq \frac{4}{3}$ et $(x,y) \neq (0,0)$ sont attirés vers cette droite.

   Cette conjecture a aussi été prouvée.

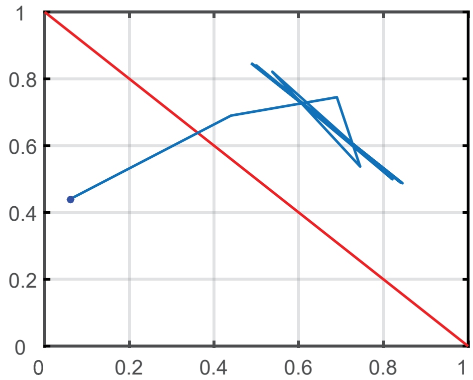
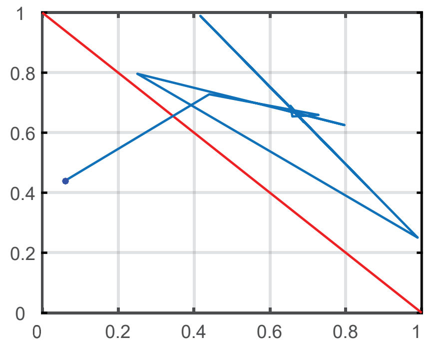
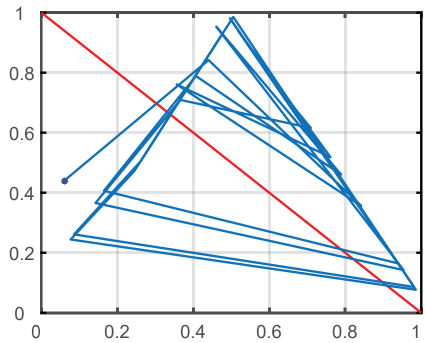


Figure 6 – 10 itérations du point $(0{,}06; 0{,}44)$ avec $\alpha = 0{,}75$.

4. Pour $\frac{3}{4} < \alpha < 1$, l'application G préserve une mesure SRB [You02] qui n'est pas absolument continue. Le concept de mesure appellée SRB, d'après Sinai, Ruelle et Bowen, est une formulation rigoureuse de ce qu'il faut à une mesure invariante pour être significative du point de vue de la physique [Wil08].



20 itérations avec $\alpha = 0{,}8$.



25 itérations avec $\alpha = 0{,}95$.

Figure 7 – Itérations du point $(0{,}06; 0{,}44)$ avec $\frac{3}{4} < \alpha < 1$.

Références

[Bog07] Vladimir Igorevich BOGACHEV : *Measure Theory*, volume 1. Springer, 2007.

[Dev92] Robert L. DEVANEY : *A First course in Chaotic Dynamical Systems*. Westview Press, 1992.

[Dev03] Robert L. DEVANEY : *An Introduction to Chaotic Dynamical systems*. Westview Press, second edition, 2003.

[GBLP16] Pawel GÓRA, Abraham BOYARSKY, Zhenyang LI et Harald PROPPE : Statistical and deterministic dynamics of maps with memory. *arXiv [math.DS]*, 2016.

[Rob95] Clark ROBINSON : *Dynamical Systems*: *Stability Symbolic Dynamics and Chaos*. CRC Press, 1995.

[Wil08] Amie WILKINSON : Smooth ergodic theory. *arXiv [math.DS]*, 2008.

[You02] Lai-Sang YOUNG : What are SRB measures, and which dynamical systems have them? *Journal of Statistical Physics*, 108(516), 2002.

MATHIEU FRAPPIER
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: Mathieu.Frappier@USherbrooke.ca