

Dégénération des représentations des carquois

Vincent Roy

Reçu le 2017-10-05 et accepté le 2017-11-11

RÉSUMÉ Cet article traite de la dégénération des représentations des carquois. Nous allons en premier lieu définir quelques aspects topologiques et d'actions de groupes. Ensuite, nous introduisons le concept de représentation de carquois et appliquons ce qui a été défini plus tôt. Finalement, nous définissons la dégénération sur un carquois de type \mathbb{A}_2 .

1 Introduction

Les représentations de carquois sont une notion faisant partie de la théorie des représentations qui fait l'étude de structures algébriques. Plus précisément, la notion de représentation de carquois est utile lorsqu'on s'intéresse à des problèmes d'algèbre linéaire, par exemple pour visualiser un ensemble algébrique par l'entremise d'un ensemble de K -espaces vectoriels.

Dans cet article, il est question de carquois de type \mathbb{A}_n et plus spécifiquement des carquois de type \mathbb{A}_2 . Pour bien comprendre, des notions de topologie sont utiles comme la fermeture d'un ensemble [Har77]. Aussi, la définition de certaines applications [Sim83] est nécessaire en vue d'utiliser certains principes d'actions de groupes.

2 Topologie de Zariski

On pose K comme étant un corps algébrique clos tout au long de cet article. Soit K muni d'un n -espace affine noté \mathbb{A}^n . On définit celui-ci comme étant un ensemble de n -uplets d'éléments de K . Un élément de \mathbb{A}^n est appelé un *point* et est de la forme $p = (p_1, \dots, p_n)$ tel que $p_i \in K$, $1 \leq i \leq n$, où les p_i sont appelés les *coordonnées* de p .

On définit maintenant $K[x_1, \dots, x_n]$ comme étant un anneau de polynômes à n variables sur K . Ensuite, on associe chaque polynôme $f(x_1, \dots, x_n)$ à une application de \mathbb{A}^n vers K en définissant $f(p) = f(p_1, \dots, p_n)$, pour tout point

Je tiens à grandement remercier le SAG pour son financement ainsi que M. Shiping Liu professeur à l'Université de Sherbrooke pour la supervision de mon stage de recherche et pour la précieuse aide qu'il m'a offerte pour la rédaction de cet article.

$p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$. Ainsi, on peut définir l'ensemble des zéros de f , qu'on nomme $Z(f) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0\}$. De façon générale, soit T un sous-ensemble de A , on définit l'ensemble des zéros de T :

$$Z(T) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0, \forall f \in T\}.$$

Définition 2.1. Un sous-ensemble Y de \mathbb{A}^n est un *ensemble algébrique* s'il existe T , un sous-ensemble de $K[x_1, \dots, x_n]$, tel que $Y = Z(T)$.

Proposition 2.2. *L'union de deux ensembles algébriques est un ensemble algébrique. L'intersection de n'importe quelle famille d'ensembles algébriques est un ensemble algébrique. De plus, l'ensemble vide et l'espace au complet sont des ensembles algébriques.*

Démonstration. Soient deux ensembles algébriques $Y_1 = Z(T_1)$ et $Y_2 = Z(T_2)$. Alors, $Y_1 \cup Y_2 = Z(T_1 T_2)$, où $T_1 T_2$ représente l'ensemble de tous les produits d'un élément de T_1 par un élément de T_2 . Donc, si on prend $p \in Y_1 \cup Y_2$, on a que soit $p \in Y_1$ ou $p \in Y_2$, alors p est un zéro de tous les polynômes dans $T_1 T_2$. Ainsi, on peut affirmer que $Y_1 \cup Y_2 \subseteq Z(T_1 T_2)$.

Inversement, si on prend $p \in Z(T_1 T_2)$ et on suppose que $p \notin Y_1$, on a qu'il existe un $f \in T_1$ tel que $f(p) \neq 0$. Par le fait que $p \in Z(T_1 T_2)$, on doit avoir, pour tout $g \in T_2$, l'égalité $(fg)(p) = 0$, ce qui implique que $g(p) = 0$, donc $p \in Y_2$. Ainsi, on peut affirmer que $Z(T_1 T_2) \subseteq Y_1 \cup Y_2$.

Ainsi, l'union de deux ensembles algébriques est un ensemble algébrique, car $Y_1 \cup Y_2 = Z(T_1 T_2)$.

Si $Y_i = Z(T_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles algébriques, on a l'égalité $\bigcap_{i \in I} Y_i = Z(\bigcup_{i \in I} T_i)$, alors $\bigcap_{i \in I} Y_i$ est un ensemble algébrique.

Finalement, l'ensemble vide est un ensemble algébrique, car $\emptyset = Z(1)$ et l'espace au complet est aussi un ensemble algébrique, car $\mathbb{A}^n = Z(0)$. \square

Définition 2.3. *La topologie de Zariski* sur \mathbb{A}^n est définie par les sous-ensembles ouverts complémentaires aux ensembles algébriques.

Ceci est bien une topologie puisque, par la proposition 2.2, on a la définition d'un espace topologique par les fermés. Donc, en prenant les complémentaires des fermés, on obtient la définition d'un espace topologique par les ouverts.

Définition 2.4. Soit X un espace topologique et soit A un sous-ensemble de X . On définit la *fermeture* de A , notée \overline{A} , comme le plus petit ensemble fermé contenant A .

Remarque 2.5. En d'autres mots, \overline{A} est l'intersection de tous les ensembles fermés contenant A . Ainsi, il est évident que si A est fermé, alors on a que $A = \overline{A}$.

Proposition 2.6. *Soit X un espace topologique. Si A et B sont des sous-ensembles de X , alors l'opération de fermeture respecte les quatre propriétés suivantes :*

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$
2. $A \subseteq \overline{A}$
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Lemme 2.7. *Soit U un sous-ensemble propre de \mathbb{A}^n . Alors, U est fermé si et seulement si U est fini.*

Démonstration. Posons d'abord $U = \{P_1\}$, avec $P_1 = (p_1, \dots, p_n)$. On considère les polynômes $f_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ de la forme $f_i = (x_i - p_i)$, $1 \leq i \leq n$. Ainsi, on obtient que $\{P_1\} = Z(f_1, \dots, f_n)$. Donc, par définition, $\{P_1\}$ est fermé. De façon plus générale, prenons maintenant $U = \{P_1, \dots, P_t\}$, tel que U est un sous-ensemble fini quelconque de \mathbb{A}^n . On peut écrire $U = \bigcup_{i=1}^t \{P_i\}$ comme une union finie d'ensembles fermés. Or, on sait par la proposition 2.2 que l'union d'un nombre fini d'ensembles fermés est aussi un ensemble fermé. Donc, U est un ensemble fermé.

Supposons que U est fermé. On a que $U = Z(T)$, où $T \subset K[x_1, \dots, x_n]$ est non-vide. Soit un polynôme $f \in T$ tel que $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - p_1) \cdots (x_n - p_n)$ où $p_1, \dots, p_n \in K$. Donc, $Z(f) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0\}$. Alors, on a que $U \subseteq Z(f)$, car $U = Z(T) = \bigcap_{g \in T} Z(g) \subseteq Z(f)$. Ainsi, U est fini. \square

Proposition 2.8. *Soit U un sous-ensemble propre de \mathbb{A}^1 . Alors U est fermé si et seulement si U est fini.*

Démonstration. La suffisance découle du lemme 2.7.

Supposons que U est fermé. Alors, $U = Z(T)$ où $T \subset K[x]$ non-vide. Prenons $f \in T$. Comme K est algébriquement clos, $f(x) = (x - p_1) \cdots (x - p_n)$ où $p_1, \dots, p_n \in K$. Donc, $Z(f) = \{p_1, \dots, p_n\}$ et on a que $U \subseteq Z(f)$, car $U = Z(T) = \bigcap_{g \in T} Z(g) \subseteq Z(f)$. Donc, U est fini. \square

Remarque 2.9. Par conséquent, si on prive \mathbb{A}^n d'un sous-ensemble fini Y , alors l'ensemble $\mathbb{A}^n \setminus Y$ est un ensemble ouvert.

Définition 2.10. Une application $\phi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ est dite *régulière* s'il existe ϕ_1, \dots, ϕ_m in $K[x_1, \dots, x_n]$ tel que $\phi(p) = (\phi_1(p), \dots, \phi_m(p))$, pour tout $p \in \mathbb{A}^n$.

Définition 2.11. Soient une application $\varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ et un sous-ensemble V de \mathbb{A}^m . On définit $\varphi^{-1}(V) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid \varphi(p) \in V\}$, un sous-ensemble de \mathbb{A}^n .

Définition 2.12. Une application $\varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ est dite *continue* si, pour tout sous-ensemble fermé V de \mathbb{A}^m , l'ensemble $\varphi^{-1}(V)$ est fermé dans \mathbb{A}^n .

Lemme 2.13. *Si une application $\phi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ est régulière, alors elle est continue.*

Démonstration. Par hypothèse, l'application ϕ est régulière, alors, par la définition 2.10, il existe $\phi_1, \dots, \phi_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ tels que $\phi(p) = (\phi_1(p), \dots, \phi_m(p))$, pour tout $p \in \mathbb{A}^n$. Prenons U un ensemble fermé de \mathbb{A}^m . Alors, il existe un ensemble $T \subseteq K[y_1, \dots, y_m]$ tel que $U = Z(T)$. Pour tout $f \in T$, on pose

$$g_f = f(\phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_n)) \in K[x_1, \dots, x_n].$$

On obtient donc l'ensemble $S = \{g_f \mid f \in T\}$, on prétend que $\phi^{-1}(U) = Z(S)$, où $Z(S) \subseteq \mathbb{A}^n$. En effet, pour tout $p \in \mathbb{A}^n$, on a que $p \in \phi^{-1}(U)$ si et seulement si $\phi(p) = (\phi_1(p), \dots, \phi_m(p)) \in U$, si et seulement si $f(\phi(p)) = 0$, pour tout $f \in T$. Or, on a par définition que $f(\phi(p)) = g_f(p)$. Donc, pour tout $f \in T$, $f(\phi(p)) = 0$ si et seulement si $g_f(p) = 0$, pour tout $g_f \in S$, c'est à dire $p \in Z(S)$. Par conséquent, $\phi^{-1}(U) = Z(S)$, qui est fermé par définition. Donc, par la définition d'une application continue, on peut affirmer que ϕ est continue. \square

Définition 2.14. Un espace topologique X est dit *irréductible* si X ne peut pas s'écrire de la forme $X = X_1 \cup X_2$ où X_1 et X_2 sont deux sous-ensembles propres et fermés de X .

Lemme 2.15. *Soit X un espace topologique irréductible. Si U est un sous-ensemble ouvert non vide de X alors $\overline{U} = X$.*

Démonstration. Par la proposition 2.2, on sait que l'espace complet est fermé. Ainsi, X est fermé et donc $\overline{X} = X$. Par définition, on a $X = U \cup (X \setminus U)$. En prenant la fermeture de chaque côté de l'égalité et par la proposition 2.6, on obtient $X = \overline{U} \cup (X \setminus U)$. Or, on a que \overline{U} est un ensemble fermé et $X \setminus U$ est un ensemble fermé propre de X . Donc, on doit avoir que $X = \overline{U}$, car X est irréductible. \square

Proposition 2.16. \mathbb{A}^1 est un espace topologique irréductible.

Démonstration. Supposons au contraire que \mathbb{A}^1 n'est pas irréductible. Alors, on peut écrire $\mathbb{A}^1 = Y_1 \cup Y_2$, où Y_1 et Y_2 sont deux sous-ensembles fermés et propres de \mathbb{A}^1 . Or, on sait par le lemme 2.7 que Y_1 et Y_2 sont des ensembles finis. Ainsi $Y_1 \cup Y_2$ est aussi un ensemble fini. Par conséquent, \mathbb{A}^1 est fini, mais \mathbb{A}^1 est infini, car K est un corps algébriquement clos. Ceci mène à une contradiction. \square

En utilisant la définition de la fermeture d'un ensemble et la définition d'application continue, il est possible de déterminer si un élément est dans la fermeture d'un ensemble.

Lemme 2.17. *Soit $U \subseteq \mathbb{A}^n$ et $f : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^n$ une application régulière. Si $f(x) \in U$ pour tout $x \in K^* = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, alors $f(0) \in \overline{U}$.*

Démonstration. Du fait que \overline{U} est un ensemble fermé et que f est continue par le lemme 2.13, on sait par définition que $f^{-1}(\overline{U})$ est fermé dans \mathbb{A}^1 . Par hypothèse, on a que $f(x) \in U$ pour tout $x \in K^*$. Donc, $K^* \subset f^{-1}(\overline{U})$. Comme K^* est un ensemble ouvert et \mathbb{A}^1 est irréductible, d'après le lemme 2.15, on a que $\overline{K^*} = \mathbb{A}^1$. De plus, comme $f^{-1}(\overline{U})$ est fermé, $\overline{K^*} \subseteq f^{-1}(\overline{U})$. En particulier, $0 \in f^{-1}(\overline{U})$, c'est-à-dire $f(0) \in \overline{U}$. \square

3 Les actions de groupes

Définition 3.1. Soient X un espace topologique et G un groupe. On dit que G agit sur X s'il existe une opération :

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que

1. $e \cdot x = x$ pour tout $x \in X$, où e est l'identité de G ;
2. $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$ pour tout $g_1, g_2 \in G$ et pour tout $x \in X$;
3. Pour tout $g \in G$, l'application

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

est un homéomorphisme ou, en d'autres mots, un isomorphisme entre deux espaces topologiques, ce qui implique que l'application g est bijective et que g et g^{-1} sont continues.

En posant G , un groupe agissant sur X , on définit, pour tout $x \in X$, l'ensemble $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ qu'on nomme la G -orbite de x .

Lemme 3.2. Soit G un groupe agissant sur X . Pour tout $Y \subseteq X$ et pour tout $g \in G$, on a que $g \cdot \overline{Y} = \overline{g \cdot Y}$.

Démonstration. Prenons une application qui est un homéomorphisme défini comme :

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que $g \cdot \overline{Y}$ est fermé, car \overline{Y} est fermé et g^{-1} est continue. De plus, $g \cdot Y \subseteq g \cdot \overline{Y}$ puisque $Y \subseteq \overline{Y}$. De ce fait, on peut affirmer que $\overline{g \cdot Y} \subseteq g \cdot \overline{Y}$, pour tout $g \in G$ et pour tout $Y \subseteq X$.

Dans l'autre sens, prenons $g^{-1} \in G$ et $g \cdot Y \subseteq X$. Ainsi, comme vu précédemment, on a que $\overline{Y} = \overline{g^{-1} \cdot (g \cdot Y)} \subseteq g^{-1} \cdot \overline{g \cdot Y}$. En appliquant g de chaque côté, on obtient $g \cdot \overline{Y} \subseteq \overline{g \cdot Y}$. Donc $g \cdot \overline{Y} = \overline{g \cdot Y}$. \square

Théorème 3.3. Soit G un groupe agissant sur X et soit $x \in X$. Si $y \in \overline{G \cdot x}$, alors $G \cdot y \subseteq \overline{G \cdot x}$.

Démonstration. Pour tout $g \in G$, on a que $g \cdot y \in g \cdot \overline{G \cdot x}$. Or, par le lemme 3.2, on a que $g \cdot \overline{G \cdot x} = \overline{g \cdot (G \cdot x)}$. Cependant, $g \cdot (G \cdot x) = G \cdot x$, car $g \in G$. Ainsi, $G \cdot y \subseteq \overline{G \cdot x}$. \square

4 Représentations des carquois

Définition 4.1. Un *carquois* Q est un graphe orienté qui se compose d'un ensemble Q_0 de sommets et d'un ensemble Q_1 de flèches entre les sommets. Si $\alpha : a \rightarrow b$ est une flèche, alors a s'appelle la *source* de α , notée $s(\alpha)$, et b , le *but* de α , noté $b(\alpha)$.

Définition 4.2. Un carquois $Q = (Q_0, Q_1)$ est dit *fini* si Q_0 et Q_1 sont des ensembles finis.

Définition 4.3. Soit $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois fini. Une *représentation* K -linéaire M de Q se compose d'une famille d'espaces vectoriels de dimension finie sur K , notée $(M(a))_{a \in Q_0}$, et d'une famille d'applications K -linéaires, notée $(M(\alpha))_{\alpha \in Q_1}$, telles que, pour une flèche $\alpha : a \mapsto b$, on a $M(\alpha) : M(a) \rightarrow M(b)$.

Définition 4.4. Soit $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois fini avec $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$. Un *vecteur-dimension* est un vecteur $\underline{d} = (d_i)_{i \in Q_0}$ d'entiers non négatifs. En outre, \underline{d} est dit *sincère* si $d_i > 0$ pour tout $i \in Q_0$.

Remarque 4.5. En particulier, si M est une représentation de Q , alors le vecteur-dimension de M est un vecteur $\underline{d} = (d_i)_{i \in Q_0}$, où $d_i = \dim(M(i))$ pour tout $i \in Q_0$.

Définition 4.6. Soient Q un carquois fini et \underline{d} un vecteur-dimension. On note $\text{Rep}_K(Q, \underline{d})$ l'ensemble des représentations K -linéaires de Q de vecteur-dimension \underline{d} .

Dans ce qui suit, si $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow W$ sont des applications linéaires de K -espaces vectoriels, alors l'application composée de f et g est notée $f \circ g$.

Définition 4.7. Soient $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois fini et M, N deux représentations K -linéaires de Q . Un *homomorphisme* $f : M \rightarrow N$ est composé d'une famille d'applications K -linéaires $f(a) : M(a) \rightarrow N(a)$ avec $a \in Q_0$ telles que, pour tout $\alpha \in Q_1$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M(a) & \xrightarrow{f(a)} & N(a) \\ M(\alpha) \downarrow & & \downarrow N(\alpha) \\ M(b) & \xrightarrow{f(b)} & N(b), \end{array}$$

ce qui veut dire que $f(a) \circ N(\alpha) = M(\alpha) \circ f(b)$. On dit que $f : M \rightarrow N$ est un *isomorphisme* si, pour tout $a \in Q_0$, $f(a)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur K .

Par exemple, si on considère le carquois \mathbb{A}_n suivant pour $n \geq 2$:

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} n-1 \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n,$$

alors une représentation M du carquois \mathbb{A}_n sur le corps K peut être illustrée par le diagramme suivant :

$$M(1) \xrightarrow{M(\alpha_1)} M(2) \longrightarrow \dots \longrightarrow M(n-1) \xrightarrow{M(\alpha_{n-1})} M(n).$$

Un homomorphisme $f : M \rightarrow N$ peut être illustré par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} M(1) & \xrightarrow{M(\alpha_1)} & M(2) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & M(n-1) \xrightarrow{M(\alpha_{n-1})} M(n) \\ f(1) \downarrow & & f(2) \downarrow & & & & f(n-1) \downarrow & & f(n) \downarrow \\ N(1) & \xrightarrow{N(\alpha_1)} & N(2) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & N(n-1) \xrightarrow{N(\alpha_{n-1})} N(n), \end{array}$$

où $f(i)$ est une application K -linéaire.

Définition 4.8. Soient $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois fini avec $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ et \underline{d} un vecteur-dimension sincère. Une K -linéaire *représentation matricielle* de Q de vecteur-dimension $\underline{d} = (d_i)_{i \in Q_0}$ est composée d'une famille $\{M_\alpha \mid \alpha \in Q_1\}$ de matrices sur K telle que, pour toute flèche $\alpha : i \rightarrow j$, la matrice M_α est de la taille $d_i \times d_j$.

Soient Q un carquois fini et \underline{d} un vecteur-dimension sincère. L'ensemble des K -linéaires représentations matricielles de Q de vecteur-dimension \underline{d} est noté $\text{Mat}(Q, \underline{d})$.

Soient $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois fini avec $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ et un vecteur-dimension $\underline{d} = (d_i)_{i \in Q_0}$. On pose :

$$\mathcal{GL}(K, \underline{d}) = \prod_{i \in Q_0} \mathcal{GL}(K, d_i),$$

où $\mathcal{GL}(K, d_i)$ est le groupe des matrices inversibles sur K d'ordre d_i . Alors, pour toutes représentations matricielles $(M_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in \text{Mat}(Q, \underline{d})$ et pour tout $g = (g_i)_{i \in Q_0} \in \mathcal{GL}(K, \underline{d})$, on pose :

$$g \cdot (M_\alpha)_{\alpha \in Q_1} = (g_{s(\alpha)}^{-1} \cdot M_\alpha \cdot g_{t(\alpha)})_{\alpha \in Q_1}.$$

Proposition 4.9. *L'action définie ci-dessus est une action de $\mathcal{GL}(K, \underline{d})$ sur $\text{Mat}(Q, \underline{d})$.*

Démonstration. On doit montrer que cette action respecte les trois axiomes de la définition 3.1. La preuve des axiomes 1 et 2 est évidente.

Pour l'axiome 3, on doit avoir un homéomorphisme, donc il faut montrer que l'action est continue. Pour ce faire, montrons que pour tout $g = (g_i)_{i \in Q_0}$ l'application suivante est une application régulière :

$$\begin{array}{ccc} g : \text{Mat}(Q, \underline{d}) & \rightarrow & \text{Mat}(Q, \underline{d}) \\ M_\alpha & \mapsto & (g_{s(\alpha)}^{-1} \cdot M_\alpha \cdot g_{t(\alpha)})_{\alpha \in Q_1}. \end{array}$$

Pour $\alpha \in Q_1$, posons $d_{s(\alpha)} = m$ et $d_{b(\alpha)} = n$. Ainsi, on a que $g_{s(\alpha)}^{-1} \in \mathcal{GL}(K, m)$, $g_{b(\alpha)} \in \mathcal{GL}(K, n)$ et $M_\alpha \in M_{m \times n}(K)$. Soient $g_{s(\alpha)}^{-1} = [a_{ij}]$ pour $1 \leq i, j \leq m$, $g_{b(\alpha)} = [b_{ij}]$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et $M_\alpha = [x_{ij}]$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. Donc, si on pose la matrice $g_{s(\alpha)}^{-1} \cdot M_\alpha \cdot g_{b(\alpha)} = [z_{ij}]$, on a $z_{ij} = \sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{lj}) \cdot x_{kl}$. Défini de cette façon, on a que g est une application régulière. Alors, g est continue par le lemme 2.13. \square

Ainsi, si le carquois Q est du type \mathbb{A}_n avec $n \geq 2$, on a $|Q_0| = n$, $|Q_1| = n-1$ et un vecteur-dimension $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ de la représentation $M = (M_1, \dots, M_{n-1})$ où $M_i \in M_{d_i \times d_{i+1}}(K)$ pour $i = 1, \dots, n-1$, alors le groupe qui agit sur $\text{Mat}(\mathbb{A}_n, \underline{d})$ est

$$\mathcal{GL}(K, \underline{d}) = \mathcal{GL}(K, d_1) \times \mathcal{GL}(K, d_2) \times \dots \times \mathcal{GL}(K, d_n).$$

Posons les deux variables suivantes, $x = (g_1, g_2, \dots, g_n) \cdot (M_1, M_2, \dots, M_{n-1})$ et $y = (g_1^{-1} \cdot M_1 \cdot g_2, g_2^{-1} \cdot M_2 \cdot g_3, \dots, g_{n-1}^{-1} \cdot M_{n-1} \cdot g_n)$, où $g_i \in \mathcal{GL}(K, d_i)$, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. Alors, l'action de groupe est définie par $x = y$.

Définition 4.10. Soient Q un carquois avec $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$, $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ un vecteur-dimension et une représentation matricielle $M \in \text{Mat}(\mathbb{A}_n, \underline{d})$, on définit l'orbite de M , notée $\mathcal{O}(M)$ comme suit :

$$\{g \cdot M \mid g \in \mathcal{GL}(K, \underline{d})\}.$$

Pour introduire le prochain théorème, on construit une correspondance entre $\text{Mat}(Q, \underline{d})$ et $\text{Rep}_K(Q, \underline{d})$.

Soient un carquois fini $Q = (Q_0, Q_1)$, un vecteur-dimension sincère \underline{d} et une représentation M de $\text{Rep}_K(Q, \underline{d})$. Pour tout $i \in Q_0$, on fixe une base \mathcal{B}_i de $M(i)$. Pour chaque flèche $\alpha : i \rightarrow j$, on prend M_α comme étant la matrice de $M(\alpha) : M(i) \rightarrow M(j)$ dans les bases \mathcal{B}_i et \mathcal{B}_j . On obtient alors une famille de matrices $\{M_\alpha \mid \alpha \in Q_1\}$ qui est une représentation matricielle de vecteur-dimension \underline{d} de Q .

Dans l'autre sens, étant donnée une représentation matricielle $\{M_\alpha \mid \alpha \in Q_1\}$ de $\text{Mat}(Q, \underline{d})$, pour tout $i \in Q_0$, on pose $M(i) = K^{d_i}$ et, pour tout $\alpha : i \rightarrow j$, on pose :

$$\begin{aligned} M(\alpha) : K^{d_i} &\rightarrow K^{d_j} \\ u &\mapsto u \cdot M_\alpha. \end{aligned}$$

On obtient une représentation M de Q .

Théorème 4.11. Soient $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois et un vecteur-dimension sincère \underline{d} . Alors, les classes d'isomorphismes de $\text{Rep}(Q, \underline{d})$ sont en bijection avec les $\mathcal{GL}(K, n)$ -orbites de $\text{Mat}(Q, \underline{d})$.

Démonstration. Soit une application qui associe chaque classe d'isomorphisme de $\text{Rep}(Q, \underline{d})$ à une orbite de $\text{Mat}(Q, \underline{d})$. Vérifions si l'application est correctement définie. Prenons une représentation M et fixons, pour chaque espace

vectorel $M(a)$, une base $\mathcal{B}(a)$. Pour chaque application linéaire $M(\alpha)$, on a une matrice $M_\alpha = [M(\alpha)]_{\mathcal{B}(b)}^{\mathcal{B}(a)}$ et, ainsi, on obtient une famille $\{M_\alpha \mid \alpha \in Q_1\}$. Alors, on envoie la représentation M sur l'orbite $\mathcal{O}(\{M_\alpha \mid \alpha \in Q_1\})$. Fixons une autre base $\mathcal{B}'(a)$ pour chaque $M(a)$. On obtient donc une nouvelle famille $\{M'_\alpha \mid \alpha \in Q_1\}$ telle que $M'_\alpha = [M(\alpha)]_{\mathcal{B}'(b)}^{\mathcal{B}'(a)}$. Or, il existe $g \in \mathcal{GL}(K, \underline{d})$ tel que $g \cdot \{M_\alpha \mid \alpha \in Q_1\} = \{M'_\alpha \mid \alpha \in Q_1\}$. Alors, on a que $\{M'_\alpha \mid \alpha \in Q_1\}$ est dans $\mathcal{O}(\{M_\alpha \mid \alpha \in Q_1\})$ et les deux orbites coïncident. Donc, l'application est correctement définie.

Maintenant, montrons la bijection. Soient $M, N \in \text{Rep}(Q, \underline{d})$ telles que les ensembles $\{M_\alpha \mid \alpha \in Q_1\}$ et $\{N_\alpha \mid \alpha \in Q_1\}$ sont leurs représentations matricielles respectives. Supposons que $\mathcal{O}(\{M_\alpha \mid \alpha \in Q_1\}) = \mathcal{O}(\{N_\alpha \mid \alpha \in Q_1\})$. Ainsi, il existe $g \in \mathcal{GL}(K, \underline{d})$ tel que $g \cdot \{M_\alpha \mid \alpha \in Q_1\} = \{N_\alpha \mid \alpha \in Q_1\}$ avec $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ où $g_i \in \mathcal{GL}(K, d_i)$, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. On peut illustrer cela par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} M(1) & \xrightarrow{M_{\alpha_1}} & M(2) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & M(n-1) & \xrightarrow{M_{\alpha_{n-1}}} & M(n) \\ g_1 \downarrow & & g_2 \downarrow & & & & g_{n-1} \downarrow & & g_n \downarrow \\ N(1) & \xrightarrow{N_{\alpha_1}} & N(2) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & N(n-1) & \xrightarrow{N_{\alpha_{n-1}}} & N(n). \end{array}$$

On a n isomorphismes $g_i : M(i) \rightarrow N(i)$ entre les représentations M et N . Donc, M et N sont isomorphes et l'application est injective. De plus, on sait que c'est surjectif, car, pour chaque orbite de $\text{Mat}(Q, \underline{d})$, on a au moins une représentation de $\text{Rep}(Q, \underline{d})$. \square

Remarque 4.12. $\text{Mat}(Q, \underline{d})$ est un sous-espace topologique de $\mathbb{A}^{d_1 \cdots d_n}$.

Définition 4.13. Soient $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois fini, \underline{d} un vecteur-dimension de Q et deux représentations $M_1, M_2 \in \text{Mat}(Q, \underline{d})$. On dit que M_2 est une *dégénération* de M_1 (ou que M_1 se *dégénère* en M_2), notée $M_1 \leq_{deg} M_2$, si $\mathcal{O}(M_2) \subseteq \overline{\mathcal{O}(M_1)}$. De plus, on dit que M_2 est une *dégénération stricte* de M_1 (ou M_1 se *dégénère strictement* en M_2), notée $M_1 <_{deg} M_2$, si $\mathcal{O}(M_2) \subset \overline{\mathcal{O}(M_1)}$.

5 Carquois \mathbb{A}_2

Dans cette section, nous travaillons sur un carquois du type \mathbb{A}_2 , en d'autres mots, un carquois composé de deux sommets et une flèche. Ainsi, une représentation de \mathbb{A}_2 est composée de deux espaces vectoriels et une application linéaire. Un vecteur-dimension de ce carquois est de la forme $\underline{d} = (d_1, d_2)$. Une représentation matricielle de \mathbb{A}_2 est un élément de $M_{m \times n}(K)$. Ainsi, $\text{Mat}(\mathbb{A}_2, \underline{d}) = M_{m \times n}(K)$. Nous notons cet espace topologique \mathbb{A}^{mn} . L'anneau des coordonnées de \mathbb{A}^{mn} est $K[x_{ij} \mid 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n]$. Posons $G = \mathcal{GL}(K, m) \times \mathcal{GL}(K, n)$.

Soient $A, B \in M_{m \times n}(K)$. On voit que A et B sont dans la même G -orbite si et seulement s'il existe deux matrices $g_1 \in \mathcal{GL}(K, m)$ et $g_2 \in \mathcal{GL}(K, n)$ telles que $Ag_2 = g_1B$.

Proposition 5.1. *Si $A \in M_{m \times n}(K)$, alors la G -orbite de A est définie par $\mathcal{O}(A) = \{B \in M_{m \times n}(K) \mid rg(B) = rg(A)\}$.*

Démonstration. Supposons $B \in \mathcal{O}(A)$. Alors, on a que $B = g_1^{-1}Ag_2$. Donc, $rg(B) = rg(A)$. Supposons $rg(B) = rg(A) = r$. On peut réduire A à la matrice échelonnée suivante :

$$I_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, il existe $g_1 \in \mathcal{GL}(K, m)$ et $g_2 \in \mathcal{GL}(K, n)$ tels que $I_r = g_1Ag_2$ ou que $I_r = g'_1Bg'_2$. Donc, $B \in \mathcal{O}(A)$. \square

Lemme 5.2. *Soit un nombre entier r tel que $0 \leq r \leq \min(m, n)$. L'ensemble $F_r = \{A \in M_{m \times n}(K) \mid rg(A) \leq r\}$ est fermé.*

Démonstration. Tout d'abord, si $r = \min(m, n)$, alors $F_r = M_{m \times n}(K)$ est fermé par la proposition 2.2.

Maintenant, posons $r < \min(m, n)$ et considérons la matrice d'inconnus suivante :

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Prenons X_1, \dots, X_p , les sous-matrices carrées d'ordre $r+1$ de X . En prenant le déterminant de X_k , on obtient un polynôme $m_k \in K[x_{ij} \mid 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n]$ où $1 \leq k \leq p$. Soit $A \in M_{m \times n}(K)$. Alors, $A \in F_r$ si et seulement si $rg(A) \leq r$, si et seulement si les mineurs d'ordre $r+1$ de A sont tous nuls, si et seulement si A est annihilée par les polynômes m_1, \dots, m_p , c'est-à-dire que $F_r = Z(m_1, \dots, m_p)$, qui est fermé par définition. \square

Proposition 5.3. *Soit $A \in M_{m \times n}(K)$. On a que*

$$\overline{\mathcal{O}(A)} = \{B \in M_{m \times n}(K) \mid rg(B) \leq rg(A)\}.$$

Démonstration. Soit $rg(A) = r$. En particulier, $A \in F_r$. On a que $\mathcal{O}(A) \subseteq F_r$. Étant donné que $\overline{\mathcal{O}(A)}$ est le plus petit fermé contenant $\mathcal{O}(A)$, d'après le lemme 5.2, on a que $\overline{\mathcal{O}(A)} \subseteq F_r$.

Maintenant, supposons $B \in F_r$, telle que $rg(B) = s$, avec $s \leq r$. Montrons par récurrence que $B \in \overline{\mathcal{O}(A)}$. Supposons $s = r$, d'après la proposition 5.1, on a que $B \in \mathcal{O}(A)$ et, donc, $B \in \overline{\mathcal{O}(A)}$. Supposons que cela est vrai pour $s \leq r$. Par

des opérations élémentaires, il est possible d'obtenir, à partir de B , la matrice échelonnée $E_s \in M_{m \times n}(K)$ suivante :

$$E_s = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit l'application continue suivante :

$$\begin{aligned} f : K &\rightarrow M_{m \times n}(K) \\ \lambda &\mapsto \begin{pmatrix} E_{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $f(\lambda) \in \overline{\mathcal{O}(A)}$ pour tout $\lambda \in K^*$. Par le lemme 2.17, on a que $f(0) \in \overline{\mathcal{O}(A)}$. Or, $f(0) = E_{s-1}$, alors $E_{s-1} \in \overline{\mathcal{O}(A)}$. Si $\text{rg}(B) = s - 1$, alors B s'échelonne à E_{s-1} et on obtient que $B \in \mathcal{O}(E_{s-1}) \subseteq \overline{\mathcal{O}(A)}$. Donc, $\overline{\mathcal{O}(A)} = \{B \in M_{m \times n}(K) \mid \text{rg}(B) \leq \text{rg}(A)\}$. \square

Théorème 5.4. *Soient $A, B \in \text{Mat}(\mathbb{A}_2, \underline{d})$. Alors, $A \leq_{\text{deg}} B$ si et seulement si $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A)$.*

Démonstration. Par définition, on a que $A \leq_{\text{deg}} B$ si et seulement si $B \in \overline{\mathcal{O}(A)}$. En vertu de la proposition 5.3, cette condition est équivalente à $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A)$. \square

Références

- [Har77] Robin HARTSHORNE : *Graduate Texts in Mathematics : Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New-York, 1977.
- [Sim83] George F. SIMMONS : *Introduction to Topology and Modern Analysis*. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1983.

VINCENT ROY
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
 Courriel: vincent.Z.roy@USherbrooke.ca