CaMUS **7**, 67 – 97

Le treillis des structures partiellement exactes

Souheila Hassoun et Élodie Lapointe

Résumé Dans le but d'avancer l'étude du treillis des structures partiellement exactes sur une catégorie additive, on prouve que ce dernier est isomorphe au treillis des sous-bimodules d'un certain bimodule sur l'algèbre d'Auslander de la catégorie.

1 Introduction

Cet article résume le travail des deux auteures durant le stage de recherche effectué par la deuxième sous la supervision de la première pendant l'hiver 2020.

Dans un cadre plus général, les recherches effectuées par le groupe de travail du professeur Thomas Brüstle sont dans le domaine de la théorie des représentations des algèbres.
La théorie des représentations, étudiée dans le livre [ASS06], est une branche des mathématiques qui étudie les structures algébriques abstraites en représentant leurs éléments comme des transformations linéaires d'espaces vectoriels. Cette théorie étudie également les modules sur ces structures algébriques abstraites.
La théorie des représentations est un outil puissant. En effet, elle permet de réduire des problèmes d'algèbre abstraite à des problèmes d'algèbre linéaire, un domaine qui est bien compris.
Dans notre projet, on étudie *le treillis des structures partiellement exactes* introduit dans [BBGH20]. Ce treillis est isomorphe au treillis des sous-bifoncteurs du bifoncteur additif d'extension sur une catégorie additive. Notre but est de simplifier l'étude de ces treillis en proposant un troisième treillis. Celui-ci est le treillis de bimodules sur une algèbre qui est isomorphe aux deux autres. Ce dernier nous offre une nouvelle façon de voir le treillis des structures partiellement exactes d'une catégorie additive et de nouvelles manières pour étudier leurs propriétés.

Cet article est divisé en 6 sections.

Les auteures remercient le professeur Thomas Brüstle, le directeur de recherche de la première auteure au doctorat, pour sa présence et son aide. Les auteures aimeraient aussi remercier Rose-Line Baillargeon et Samuel Lalumière Lavoie pour leur participation dans le projet. Les auteures sont supportées par : Bishop's University et l'Université de Sherbrooke. La première auteure est supportée par la bourse "thésards étoiles" de l'ISM.

Dans la première section, celle dans laquelle on se trouve, on organise notre projet et on énonce les grandes lignes de notre article.

Dans la deuxième section, on aborde la théorie des modules à gauche et à droite sur une algèbre et, plus généralement, sur un anneau. Cela permet de définir les bimodules. On mentionne également plusieurs notions et propriétés qui nous permettront de mieux comprendre ce qu'est un bimodule sur une algèbre.

Dans la troisième section, on définit une catégorie exacte ; une paire formée par une catégorie additive et une structure exacte de Quillen. Cette dernière nous permet de définir ce qu'est une structure partiellement exacte ; une classe de suites exactes courtes formées par des objets de la catégorie additive, satisfaisant quelques axiomes de Quillen.

Dans la quatrième section on discute des sous-bifoncteurs du bifoncteur d'extension *Ext* en général et des sous-bifoncteurs fermés parmi eux.

Dans la cinquième section, on définit ce qu'est une structure de treillis sur un ensemble partiellement ordonné. On présente aussi le treillis des structures partiellement exactes d'une catégorie additive et le treillis des sous-bifoncteurs de *Ext*. Par la suite, on construit un ensemble de bimodules admettant une structure de treillis isomorphe aux deux dernières structures mentionnées. On construit explicitement un isomorphisme de treillis. On prend bien soin d'expliquer notre preuve étape par étape. On obtient donc comme résultat trois treillis isomorphes.

Enfin, dans la dernière section, on donne un exemple concret du treillis étudié dans les sections précédentes. On refère au livre [ASS06] pour une meilleure compréhension des notions impliquées dans l'exemple.

Tous les concepts mathématiques décrits dans cette introduction sont définis et décris en détail dans la suite de notre article.

2 Les bimodules

Nous commençons par définir ce qu'est une structure de bimodule sur un ensemble et nous donnons des exemples d'une telle structure algébrique. Deux exemples connus de modules sont donnés par les groupes abéliens et les espaces vectoriels. Chaque groupe abélien est un $\mathbb{Z}-$module, c'est-à-dire un module sur l'anneau des entiers et chaque espace vectoriel est un module sur le corps des scalaires.
Notons que les notions introduites dans cette section sont issues de [Ass97].

2.1 Définitions

Avant de se plonger dans la définition d'un bimodule, on commence par définir quelques concepts importants. Tout d'abord, on rappelle très brièvement ce qu'est un anneau et une algèbre. Par la suite, on définit un module à droite, un module à gauche. On termine par définir les bimodules.

2.1.1 Les anneaux

Contrairement aux groupes qui ne possèdent qu'une opération, les anneaux représentent les ensembles qui possèdent deux opérations : l'addition et la multiplication. Bien que légèrement plus complexe, cette représentation est beaucoup plus générale. En effet, la majorité des ensembles possèdent plus d'une opération. Pensez notamment aux entiers ou aux nombres réels.

Définition 2.1. Un ensemble A admet une structure d'*anneau* s'il est muni de 2 opérations nommées l'addition et la multiplication $(A,+,\cdot)$. Ces opérations doivent respecter les conditions suivantes :

1. $(A,+)$ est un groupe abélien,
2. $(A,\cdot)$ est un monoïde[1],
3. La multiplication est distributive à gauche et à droite sur l'addition : $a(b+c) = ab + ac$ et $(b+c)a = ba + ca$.

2.1.2 Les modules

Lorsqu'on étudie les espaces vectoriels, on choisit les scalaires parmi les éléments d'un corps et ces scalaires agissent sur les éléments de l'ensemble de base d'un module. On a voulu généraliser cette construction, mais en ne limitant pas l'ensemble des scalaires à un corps. Le concept de module a fait son apparition lorsqu'on a voulu que les scalaires appartiennent plutôt à un anneau (voir 2.1). Plus précisément, un module M est un groupe abélien additif muni d'une multiplication à gauche ou à droite par les éléments d'un anneau. Plus formellement, on définit ce concept de la manière suivante.

Définition 2.2. Soit A un anneau, un A-*module* (à gauche) est composé d'un groupe abélien M, dont l'opération est l'addition, ainsi que d'une multiplication à gauche par les éléments de A (opération externe). Il existe donc une application $A \times M \to M$ définit par $(a,x) \mapsto ax$ ($a \in A$ et $x \in M$) telle que les conditions suivantes sont respectées pour tous $a, b \in A$ et pour tous $x, y \in M$:

1. $(ab)x = a(bx)$;
2. $1_A \cdot x = x$;
3. $(a+b)x = ax + bx$;
4. $a(x+y) = ax + ay$.

Note 2.3. La notation utilisée pour spécifier si M est un module à gauche est la suivante : ${}_AM$. Il est également à noter que la définition pour un A-module à droite est similaire à celle énoncée ci-haut. La seule différence est que les éléments de l'anneau A sont placés à droite et non à gauche des éléments de M. On note ce module M_A.

[1] Un monoïde est un ensemble E muni d'une opération $\star$ telle que $\star$ est associative et E possède un élément neutre

Exemple 2.4. Soient A et B deux anneaux. De plus, considérons qu'il existe un morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$.
Dans cet exemple, on suppose que tous les modules sont des modules à droite.

1. Posons $\star$ comme la loi externe de A sur M et $*$ celle de B sur M.

2. On sait que pour avoir M_A, on a besoin d'une opération externe bien définie entre les éléments de A et de M. On a vu que, en général, pour avoir un module, il doit exister une application telle que $M \times A \to M$ définie par $(x, a) \mapsto x \star a$ ($a \in A$ et $x \in M$). Dans le cas de cet exemple, on connait seulement l'existence d'un module M_B et d'un morphisme φ. On doit donc utiliser ces informations pour redéfinir l'application $(x, a) \mapsto x\star a$. On prendra $x\star a = x*\varphi(a)$. On obtiendra alors une application bien définie puisque le module M_B existe. Cela implique que $x * \varphi(a)$ existe et est bien contenu dans M.

Remarque 2.5.

1. Dans l'exemple précédent, on dit que le B-module de M induit la structure de A-module par *changement des scalaires*.

2. Il existe deux cas particuliers à l'exemple précédent.

   (a) Si $A \subseteq B$ et φ est l'inclusion.

   (b) Si $B = A/I$ avec $I \trianglelefteq A$ un idéal bilatère de A et $\varphi : A \to A/I$ la projection canonique, alors on définira $x \star a = x * \varphi(a) = x * (a + I)$.

2.1.3 Les sous-modules

Définition 2.6. Soit N un ensemble qui contient au moins un élément. Alors N est un *sous-module* si $\forall a, b \in A$ et $\forall x, y \in N$, on a $ax + by \in N$.

Définition 2.7. Soient A un anneau et M un A-module. On dénote par $\mathcal{S}(M)$ l'ensemble des sous-modules de M ordonné par l'inclusion ordinaire des ensembles.

Exemple 2.8. Choisissons, pour cet exemple, une famille de sous-modules de M suivante $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Il est intéressant de noter que dans cette situation, l'intersection de tous les sous-modules $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ est également un sous-module de M. De plus, ce sous-module est le plus grand de l'ensemble M qui soit contenu dans chaque M_λ.
Essayons de trouver un autre sous-module à partir de cette famille. Prenons, la somme $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ définit comme l'ensemble des sommes qui s'écrivent de la manière suivante, $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ avec $x_\lambda \in M_\lambda$ $\forall\lambda \in \Lambda$. De plus, dans cette définition, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ doit être une famille d'éléments de M à support fini. Si ces conditions sont respectées, alors on peut facilement vérifier que $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ est aussi un sous-module de M. De plus, celui-ci est le plus petit sous-module de M qui contient tous les M_λ.

2.1.4 Les algèbres

Définition 2.9. Soit K un corps. Une *K-algèbre* est un ensemble qui est à la fois un K-module et un anneau A. De plus, ces deux structures doivent être compatibles, c'est-à-dire $\forall a{,}b \in A$ *et* $\alpha \in K$ la condition suivante est respectée :

$$(ab)\alpha = a(b\alpha) = (a\alpha)b.$$

Définition 2.10. Soit A une algèbre. On appelle *algèbre opposée*, notée A^{op}, une algèbre qui possède la même structure de K-module que A. Cependant, la multiplication $*$ de A^{op} est définie par $a * b = ba$, $\forall a,\, b \in A$.

Remarque 2.11.

1. L'algèbre A est commutative $\Leftrightarrow A = A^{op}$.
2. De la même manière qu'on a défini un A-module sur un anneau en général 2.2, on peut considérer les A-modules sur une algèbre.

Définition 2.12. [ASS06, A.2(2.10)] Soit A une K-algèbre de représentation finie, c'est-à-dire telle qu'il n'existe, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de A-module indécomposables, et soient $X_1, \ldots, X_n$ l'ensemble des modules indécomposables[2] sur A. On définit *l'algèbre d'Auslander de* A la K-algèbre de dimension finie donnée par :

$$B = End(\bigoplus_{j=1}^{n} X_j).$$

2.1.5 Les bimodules

Maintenant que le concept de module a été introduit, il est plus simple de comprendre les bimodules. En effet, un bimodule comme le suggère son nom est constitué de deux structures de modules sur le même ensemble sous-jacent, une structure de module à droite et une structure de module à gauche. Cependant, ces deux structures doivent satisfaire une propriété qui permet d'assurer que ces structures de modules à gauche et à droite sont compatibles.

Définition 2.13. Soit A et B deux anneaux et M un groupe abélien. Un *(A-B) bimodule* (aussi noté ${}_AM_B$) est un ensemble M qui est à la fois un A-module à gauche, ${}_AM$, et un B-module à droite, M_B, et ces deux structures sont compatibles, c'est-à-dire que la condition suivante est satisfaite :

$$a \star (x * b) = (a \star x) * b,$$

avec $a \in A$, $b \in B$ et $x \in M$ où $\star$ est la loi externe de A sur M et $*$ celle de B sur M.

Exemple 2.14. Soit A un anneau et $I \trianglelefteq A$ alors I a une structure ${}_AI_A$.

[2] c'est-à-dire si $X_j = S \oplus S'$ alors $S = 0$ ou $S' = 0$

Remarque 2.15. Si l'anneau A est commutatif, la distinction entre un module à droite M_A et un module à gauche ${}_AM$ n'est qu'une question d'écriture. Dans ce cas, un tel module M peut être considéré comme un bimodule ${}_AM_A$ dont les deux lois externes sont identiques à la loi du A-module donné.

Démonstration. Soit A un anneau commutatif. Supposons que les deux opérations externes sont définies de la manière suivante avec ($a, b \in A$ et $x \in M$) :

$$\star : A \times M \to M; \qquad (a, x) \mapsto a \star x$$

$$* : M \times A \to M; \qquad (x, b) \mapsto x * b = b \star x.$$

On a alors que :

$$a \star (x * b) = a \star (b \star x) = (ab) \star x = (ba) \star x = b \star (a \star x) = (a \star x) * b.$$

On voit donc que lorsque A est commutatif, si M est un A-module, M peut aussi être considéré comme un bimodule ${}_AM_A$.

$\square$

Définition 2.16. Soient M et N deux (A-B) bimodules avec $\diamond$ comme la loi externe de A sur M et $*$ celle de B sur M. Si une application $f : M \to N$ respecte les conditions suivantes :

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in M$;
2. $f(a \diamond x * b) = a \diamond f(x) * b$, $\forall x \in M$, $a \in A$ et $b \in B$;

alors on dit que f est un *morphisme* de (A-B) bimodules (ou application A-B linéaire)

On peut aussi réécrire ces deux conditions en la condition suivante :

$$f(a \diamond x * b + a' \diamond y * b') = a \diamond f(x) * b + a' \diamond f(x) * b'.$$

Remarque 2.17. Il est a noter qu'un morphisme de modules ${}_AM$ (ou application A-linéaire) respecte la condition 1 de 2.16 ainsi que la condition $f(a \diamond x) = a \diamond f(x)$, $\forall x \in M$, $a \in A$.

Définition 2.18. Soit A une K-algèbre et L_A ainsi que ${}_AM$ deux modules. Une application $g : L \times M \to X$, avec $L \times M$ et X des K-modules, est dite *A-bilinéaire* si les conditions suivantes sont respectées.

1. $g(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2, y) = g(x_1, y)\alpha_1 + g(x_2, y)\alpha_2$;
2. $g(x, y_1\beta_1 + y_2\beta_2) = g(x, y_1)\beta_1 + g(x, y_2)\beta_2$;
3. $g(xa, y) = g(x, ay)$,

$\forall x, x_1, x_2 \in L$, $y, y_1, y_2 \in M$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$ et $a \in A$.

Définition 2.19. Un *produit tensoriel* de L_A et ${}_AM$ est défini par la donnée d'une paire (T,t), où T est un K-module et t est une application A-bilinéaire de $L \times M$ vers T, telle que, pour toute paire (X,g), avec X un K-module et g une application A-bilinéaire de $L \times M$ vers X, il existe, à isomorphisme près, une unique application K-linéaire $\overline{g} : T \to X$ telle que $\overline{g}t = g$.

Le diagramme ci-dessous illustre les applications de la Définition 2.19.

$$\begin{tikzcd} L \times M \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, dashed, "\overline{g}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

On notera $T = L \otimes_A M$ le produit tensoriel de L et M.

Proposition 2.20. *Soient A et B deux K-algèbres. Tout bimodule ${}_AM_B$ peut être vu comme un $A \otimes B^{op}$-module $M_{A\otimes B^{op}}$.*

Démonstration. On sait que le produit tensoriel de deux algèbres est une algèbre satisfaisant les propriétés suivantes pour tous $a \otimes b$ avec $a \in A$ et $b \in B$:

i. $(\lambda a) \otimes b = a \otimes (\lambda b) = \lambda(a \otimes b)$;

ii. $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$.

À partir de ces propriétés, on peut montrer que tout $(A$-$B)$ bimodule ${}_AM_B$ donne lieu à un $A \otimes B^{op}$-module à partir du même groupe abélien M et de la multiplication définie par $m \cdot (a \otimes b) := amb$. Inversement, un $A \otimes B^{op}$-module N permet de créer un $(A$-$B)$ bimodule ${}_AN_B$ muni de la multiplication externe suivante $anb := n \cdot (a \otimes b)$. Donc, un bimodule ${}_AM_B$ peut être vu comme un $A \otimes B^{op}$-module $M_{A\otimes B^{op}}$.

Remarque 2.21. On dénote $End(M_A)$ l'ensemble des applications A-linéaires de M_A vers lui-même. Posons $B = End(M_A)$, cet ensemble forme une algèbre, pour la composition usuelle d'applications et l'addition d'applications linéaires. Il est intéressant de noter que tout A-module M_A a également une structure naturelle de $(B$-$B)$ bimodule. Voir [Ass97] pour plus de détails.

□

3 Les catégories partiellement exactes

Dans cette section, on rappelle les notions de base de la théorie des catégories. Le but est de définir les catégories exactes et partiellement exactes.

3.1 La théorie des catégories

Définition 3.1. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est définie par la donnée de :

1. Une classe d'objets $\mathcal{C}_0$ aussi notée $Ob(\mathcal{C})$.

2. Une classe de flèches (de morphismes) , définie par la donnée pour chaque paire d'objets (X,Y) d'un ensemble $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$.
Notant que si $(X,Y) \neq (X',Y')$, alors $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \cap Hom_{\mathcal{C}}(X',Y') = \emptyset$.

3. Une application bien définie pour chaque triplet d'objets (X,Y,Z) de $\mathcal{C}$, appelée *la composition* des morphismes :

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to Hom_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

$$(f,g) \longmapsto g \circ f.$$

Cette composition doit également respecter les deux conditions suivantes :

(a) L'associativité de la composition : si on a $f \in Hom_{\mathcal{C}}(U,V)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(V,W)$, $h \in Hom_{\mathcal{C}}(W,X)$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(b) Pour chaque objet X de $\mathcal{C}$, il existe un morphisme appelé *l'identité sur* X noté :

$$1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X).$$

Et ce morphisme joue le rôle de l'unité à gauche et à droite, c'est-à-dire que si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et $g \in Hom_{\mathcal{C}}(W,X)$, alors $f \circ 1_X = f$ et $1_X \circ g = g$.

Exemple 3.2. Les bimodules (voir 2.13) sur une algèbre A (voir 2.9) forment une catégorie dont les objets sont les bimodules et les flèches sont les morphismes de bimodules (voir 2.16).

Remarque 3.3. La correspondance introduite en 2.20 définit alors des équivalences inverses entre les catégories de $(A$-$B)$ bimodules et $A \otimes B^{op}$-modules.

Proposition 3.4. *Soit M et N deux A-modules. L'ensemble des applications A-linéaires de M dans N se note $Hom_{Mod(A)}(M,N)$. On définit sur cet ensemble les opérations suivantes :*

i. La somme de $f,g : M \to N$ est définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ avec $x \in M$;

ii. Le produit de $f : M \to N$ par $\alpha \in K$ est défini par $(f\alpha)(x) = \alpha f(x)$ avec $x \in M$.

Comme ces opérations satisfont les axiomes de la Définition 2.2, elles définissent une structure de K-module sur l'ensemble $Hom_{ModA}(M,N)$.

3.2 Les catégories additives

Tout d'abord, on va définir quelques concepts comme le produit et la somme directe pour une catégorie. Ensuite, on va énoncer ce qu'est une catégorie linéaire. Ces notions sont essentielles pour comprendre la définition d'une catégorie additive.

3.2.1 Définitions et concepts importants

Définition 3.5 ([Ass97]). Soit $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Un *produit* de $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est défini lorsqu'on a une paire $(M,(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ donnée. De plus, si on a une autre paire $(M',(p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ donnée alors il existera un unique morphisme $f:\ M'\to M$. En outre, ce morphisme est tel que $p_\lambda\circ f=p'_\lambda$, $\forall\ \lambda\in\Lambda$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_\lambda"] & M_\lambda \\ M' \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "p'_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

Dans un tel cas, on dit que M est un objet *universel*. On peut également dire que celui-ci est universellement *attirant*. On note généralement le produit par $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

Définition 3.6 ([Ass97]). Soit $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Une *somme directe*, ou coproduit, de $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est définie lorsqu'on a une paire $(M,(q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ donnée. De plus, si on a une autre paire $(M',(q'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ donnée alors il existe un unique morphisme $f:\ M\to M'$. En outre, ce morphisme est tel que $f\circ q_\lambda=q'_\lambda$, $\forall\ \lambda\in\Lambda$

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[r, "q_\lambda"] \arrow[dr, "q'_\lambda"'] & M \arrow[d, dashed, "f"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

Dans un tel cas, on dit aussi que M est un objet *universel*. Cependant, on dit plutôt que celui-ci est universellement *repoussant*. On note généralement l'opération de la somme directe par $M=\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ ou encore $\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

Définition 3.7. Soit K un anneau commutatif. Une catégorie $\mathcal{C}$ est **additive** si :

1. Pour toute paire (X,Y), avec X,Y des objets de $\mathcal{C}$, l'ensemble $Hom_C(X,Y)$ est un groupe abélien.

2. La composition de $\mathcal{C}$ respecte les conditions suivantes :

   (a) $g\circ(f_1\alpha_1+f_2\alpha_2)=(g\circ f_1)\alpha_1+(g\circ f_2)\alpha_2$

   (b) $(g_1\beta_1+g_2\beta_2)\circ f=(g_1\circ f)\beta_1+(g_2\circ f)\beta_2$

avec f, f_1, $f_2 : X \to Y$, g, g_1, $g_2 : Y \to Z$, et α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in K$

3. Toute famille finie d'objets de $\mathcal{C}$ admet un produit ($\prod$) et une somme directe ($\bigoplus$) dans $\mathcal{C}$.

Voici quelques exemples comparant les notions de produit et de co-produit, qui ne coïncident pas toujours nécessairement :

Exemple 3.8. On considère la catégorie des groupes $\mathcal{G}r$ où le produit est donné par le produit cartésien des groupes tandis que la somme directe (co-produit) est le produit libre de groupes.

Exemple 3.9. On considère la catégorie des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels où la somme d'une famille infinie de copies de $\mathbb{R}$ est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$, qui est un espace vectoriel de dimension infinie, mais où chaque élément lui-même n,a qu'un nombre fini de coefficients non nuls, tandis que leur produit est isomorphe aux suites de nombre réels $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 3.10. Soit K un anneau commutatif. Une catégorie $\mathcal{C}$ est *additive* si :

1. Pour toute paire (X,Y), avec X, Y des objets de $\mathcal{C}$, l'ensemble $Hom_C(X,Y)$ est un groupe abélien.

2. La composition de $\mathcal{C}$ respecte les conditions suivantes :

   (a) $g \circ (f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2) = (g \circ f_1)\alpha_1 + (g \circ f_2)\alpha_2$;
   (b) $(g_1\beta_1 + g_2\beta_2) \circ f = (g_1 \circ f)\beta_1 + (g_2 \circ f)\beta_2$;

   avec f, f_1, $f_2 : X \to Y$, g, g_1, $g_2 : Y \to Z$, et α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in K$.

3. Toute famille finie d'objets de $\mathcal{C}$ admet un produit ($\prod$) et une somme directe ($\bigoplus$) dans $\mathcal{C}$.

On a terminé la définition des concepts importants à la compréhension d'une catégorie K-linéaire. Il est donc possible d'énoncer la signification de cette notion.

Définition 3.11. Une catégorie K**-linéaire** est une petite catégorie additive dont le groupe abélien $Hom_C(X,Y)$ est un K-module pour toute paire d'objets. Une catégorie additive est donc une catégorie $\mathbb{Z}-$linéaire.

Suivant 2.12 on introduit :

Définition 3.12. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive *Krull-Schmidt* de représentation finie, c'est-à-dire que chaque objet se décompose en somme directe finie d'objets indécomposables d'une manière unique à permutation près. De plus, soient X_1,...,X_n les représentants des classes d'isomorphismes d'objets indécomposables de $\mathcal{A}$ et soit $X = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} X_j$.
On définit **l'algèbre d'Auslander** de $\mathcal{A}$ par : $B = \mathrm{End}\,(X)$.

3.3 Les suites exactes

Définition 3.13. Soit une suite de A-modules et d'applications A-linéaires,

$$\ldots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \ldots$$

celle-ci est dite *exacte en* M_i si $Im(f_{i+1}) = Ker(f_i)$. Elle est dite *exacte* si elle l'est en tout M_i.

Définition 3.14. Une *suite exacte courte* ou s.e.c pour simplifier les notations, est une suite exacte dans le sens de la Définition 3.13, c'est-à-dire que f est un monomorphisme, g est un épimorphisme et $Im(f) = Ker(g)$:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0.$$

Note 3.15.

1. Tout morphisme surjectif de modules $g : N \to P$ induit une suite exacte courte suivante, avec j l'inclusion :

$$0 \longrightarrow Ker\ g \overset{j}{\hookrightarrow} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0.$$

2. Tout morphisme injectif de modules $f : M \to N$ induit une suite exacte courte suivante, avec p la projection :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} Coker\ f \longrightarrow 0.$$

Définition 3.16. Deux suites exactes courtes sont dites *équivalentes* s'il existe un morphisme $\beta : N \to N'$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal, "1_M"] & N \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, dashed, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d, equal, "1_P"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, tail, "f'"] & N' \arrow[r, two heads, "g'"] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Définition 3.17. Une suite exacte courte est dite *scindée* s'il existe un isomorphisme $h : N \to M \oplus P$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal, "1_M"] & N \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, dashed, "h"] & P \arrow[r] \arrow[d, equal, "1_P"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, tail, "q_1"] & M \oplus P \arrow[r, two heads, "p_2"] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En utilisant [Büh10, Corollaire 3.2], il suffit qu'il existe n'importe quel morphisme h qui fait commuter le diagramme.

3.3.1 Produits fibrés et sommes amalgamées

Nous définirons ici le produit fibré et la somme amalgamée sur $\mathcal{C}$, lorsque $\mathcal{C}$ désigne une catégorie additive.

Définition 3.18. Soit $f_1 : X_1 \to X$, $f_2 : X_2 \to X$ deux morphismes de $\mathcal{C}$. Un *produit fibré* (ou *pull back* en anglais) de f_1 et f_2 est la donnée d'un objet P et de deux morphismes $p_1 : P \to X_1$, $p_2 : P \to X_2$ tels que :

1. $f_1p_1 = f_2p_2$,
2. pour tout objet Y et toute paire de morphismes $g_1 : Y \to X_1$, $g_2 : Y \to X_2$ tels que $f_1g_1 = f_2g_2$, il existe un unique morphisme $g : Y \to P$ tel que $p_1g = g_1$ et $p_2g = g_2$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, bend left, "g_1"] \arrow[ddr, bend right, "g_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
& X_2 \arrow[r, "f_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

Définition 3.19. Soit $f_1 : X \to X_1$, $f_2 : X \to X_2$ deux morphismes de $\mathcal{C}$. Une *somme amalgamée* (ou *push out* en anglais) de f_1 et f_2 est la donnée d'un objet Q et de deux morphismes $q_1 : X_1 \to Q$, $q_2 : X_2 \to Q$ tels que :

1. $q_1f_1 = q_2f_2$,
2. pour tout objet Y et toute paire de morphismes $g_1 : X_1 \to Y$, $g_2 : X_2 \to Y$ tels que $g_1f_1 = g_2f_2$, il existe un unique morphisme $g : Q \to Y$ tel que $gq_1 = g_1$ et $gq_2 = g_2$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & X_1 \arrow[d, "q_1"] \arrow[ddr, bend left, "g_1"] & \\
X_2 \arrow[r, "q_2"'] \arrow[drr, bend right, "g_2"'] & Q \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

Exemple 3.20. Le produit fibré constitue un sous-ensemble du produit cartésien et dans des catégories ensemblistes, telles celles des espaces topologiques ou des espaces vectoriels, le produit fibré constitue lui-même un objet de la catégorie. Voir [Ass97] pour plus d'exemples.

3.4 Les structures exactes de Quillen

3.4.1 Définition et propriétés de base

Ici, nous rappellerons suivant [Büh10], la définition d'une catégorie exacte au sens de Quillen [Qui73] et nous donnerons quelques exemples.

Définition 3.21. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. Une paire noyau-conoyau (i, d) dans $\mathcal{A}$ est une paire de morphismes composables tels que i est le noyau de d et d est le conoyau de i. Si une classe $\mathcal{E}$ de paires de noyau-conoyau sur $\mathcal{A}$ est fixée, un *monomorphisme admissible* est un morphisme i pour lequel il existe un morphisme d tel que $(i, d) \in \mathcal{E}$. On écrira :

$$A \overset{i}{\rightarrowtail} B \ .$$

On définit un *épimorphisme admissible* de façon duale à la Définition 3.21. De plus, on écrira :

$$B \overset{d}{\twoheadrightarrow} C \ .$$

Définition 3.22. Une *structure exacte* $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{A}$ est une classe de paires de noyau-conoyau (i, d) dans $\mathcal{A}$, fermée à isomorphismes près et satisfaisant aux axiomes suivants :

(E0) Pour tout objet A dans $\mathcal{A}$, l'identité 1_A est un monomorphisme admissible.

(E0)^{op} Pour tout objet A dans $\mathcal{A}$, l'identité 1_A est un épimorphisme admissible.

(E1) La classe des monomorphismes admissibles est fermée sur la composition.

(E1)^{op} La classe des épimorphismes admissibles est fermée sur la composition.

(E2) La somme amalgamée d'un monomorphisme admissible $i : A \rightarrowtail B$ et d'un morphisme quelconque $t : A \longrightarrow C$ existe et s_C est un monomorphisme admissible :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "\text{SA}"] & B \arrow[d, "s_B"] \\ C \arrow[r, tail, "s_C"'] & S \end{tikzcd}$$

(E2)^{op} Le produit fibré d'un épimorphisme admissible $h : A \twoheadrightarrow C$ et d'un morphisme quelconque $t : B \longrightarrow C$ existe et p_B est un épimorphisme admissible :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, two heads, "p_B"] \arrow[d, "p_A"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PF}"] & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[r, two heads, "h"'] & C. \end{tikzcd}$$

On dénote par $Ex(A)$ l'ensemble (jamais vide) formé par toutes les structures exactes $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{A}$.

Définition 3.23. Une *catégorie exacte* est une paire $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ constituée d'une catégorie additive $\mathcal{A}$ et d'une structure exacte $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire une classe de suites exactes courtes satisfaisant les axiomes $(E0)$, $(E0)^{op}$, $(E1)$, $(E1)^{op}$,$(E2)$ et $(E2)^{op}$ de la Définition 3.22.

Remarque 3.24. Il est intéressant de savoir que $\mathcal{E}$ est une structure exacte sur $\mathcal{A}$ si et seulement si $\mathcal{E}^{op}$ est une structure exacte sur $\mathcal{A}^{op}$, alors pour toute catégorie exacte $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ son opposée $(\mathcal{A}^{op}, \mathcal{E}^{op})$ est aussi exacte.

Définition 3.25. [BBGH20, 4.10] Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. Une *structure partiellement exacte* $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{A}$ est une classe de paires noyau-conoyau (i, d) dans $\mathcal{A}$, fermée sous les isomorphismes, fermée pour la somme directe et satisfaisant les axiomes $(E0)$, $(E0)^{op}$,$(E2)$ et $(E2)^{op}$ de la Définition 3.22. On dénote par $Wex(A)$ l'ensemble formé par toutes les structures partiellement exactes $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{A}$ qui sont incluses dans $\mathcal{E}_{max}$ du théorème 3.26.

3.4.2 La structure exacte minimale

Il est bien connu que toute catégorie additive admet une structure exacte *minimale* pour l'inclusion des classes.

Définition 3.26. La *structure exacte minimale* est la classe de toutes les suites exactes courtes scindées (voir 3.17), on la note $\mathcal{E}_{min}$. Celle-ci forme une structure exacte sur toute catégorie additive $\mathcal{A}$.

Proposition 3.27. *[Büh10, exemple 13.1] Pour toute catégorie additive $\mathcal{A}$ les suites isomorphes à une suite de la forme :*

$$A \overset{f}{\rightarrowtail} A \oplus B \overset{g}{\twoheadrightarrow} B$$

forment une structure exacte $\mathcal{E}_{min}$, appelée la structure exacte scindée*.*

En effet, toute structure exacte sur $\mathcal{A}$ contient les suites exactes courtes scindées [Büh10, Lemma 2.7], ce qui fait que $\mathcal{E}_{min}$ est la borne inférieure du treillis $Ex(\mathcal{A})$ formé par toutes les structures exactes sur $\mathcal{A}$.

3.4.3 La structure exacte maximale

Théorème 3.28. *[Rum11, Corollaire 2] Toute catégorie additive admet une unique structure exacte maximale $\mathcal{E}_{max}$.*

4 Les sous-bifoncteurs fermés de Ext^1

4.1 Définitions et exemples

Définition 4.1. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories.

1. Un *foncteur covariant* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est défini par la donnée pour chaque objet $X \in \mathcal{C}$ d'un objet $FX \in \mathcal{D}$ et pour chaque morphisme $(f : X \to Y) \in \mathcal{C}$ d'un morphisme $(F(f) : FX \to FY) \in \mathcal{D}$ de sorte que

   (a) Si $g \circ f$ est bien définie dans $\mathcal{C}$, alors $F(g) \circ F(f)$ est bien définie dans $\mathcal{D}$ et $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

   (b) $\forall$ objet $X \in \mathcal{C}$, $F(1_X) = 1_{FX}$.

   De façon plus visuelle :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & FX \arrow[d, "F(f)"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & FY \end{tikzcd}$$

2. Un *foncteur contravariant* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est défini par la donnée pour chaque objet $X \in \mathcal{C}$ d'un objet $FX \in \mathcal{D}$ et pour chaque morphisme $(f : X \to Y) \in \mathcal{C}$ d'un morphisme $(F(f) : FY \to FX) \in \mathcal{D}$ de sorte que

(a) Si $g \circ f$ est bien définie dans $\mathcal{C}$, alors $F(f) \circ F(g)$ est bien définie dans $\mathcal{D}$ et $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

(b) $\forall$ objet $X \in \mathcal{C}$, $F(1_X) = 1_{FX}$.

De façon plus visuelle :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & FX \\ Y \arrow[r, mapsto] & FY \arrow[u, "F(f)"'] \end{tikzcd}$$

Définition 4.2. Un *bifoncteur* est un foncteur à deux variables. Il est contravariant dans la première variable et covariant dans la seconde.

Exemple 4.3. Le foncteur d'abélianisation $A : \mathbb{G}r \to \mathcal{A}b$ qui à chaque groupe G associe son groupe abélianisé $G^{ab} = G/G'$, où son groupe dérivé

$$G' = \{aba^{-1}b^{-1} | a,b \in G\}.$$

Exemple 4.4. Le foncteur covariant L : **Ens** $\to Vect_K$ qui envoie chaque ensemble vers son espace vectoriel (ou module) libre.

Vu que les sous-bifoncteurs de Ext^1 sont considérés en profondeur dans la sous-section prochaine, voici une exemple accessible illustrant la notion d'un sous-foncteur en général.

Exemple 4.5. On considère le foncteur identité sur la catégorie des groupes abéliens $I : \mathcal{A}b \to \mathcal{A}b$. Le foncteur envoyant un groupe abélien vers son sous-groupe de torsion forme un sous-foncteur de I.

Définition 4.6. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et X un objet de $\mathcal{C}$. Le bifoncteur $Hom_{\mathcal{C}}$**(-,-)** associe à chaque paire d'objets de $\mathcal{C}$ l'ensemble des flèches entre eux. Plus précisément, on définit le foncteur covariant[3] :

$$Hom_C(X,-) : \mathcal{C} \longrightarrow Ens$$

$$M \longmapsto Hom_C(X,M).$$

De plus, pour chaque morphisme $(f : M \to N)$, on a une application

$$Hom_C(X,f) : Hom_C(X,M) \to Hom_C(X,N)$$

$$g \mapsto g \circ f.$$

Dualement, on définit le foncteur contravariant :

$$Hom_C(-,X) : \mathcal{C} \longrightarrow Ens$$

$$M \longmapsto Hom_C(M,X).$$

[3] Attention, on note $Hom_C(X,M)$ comme étant l'ensemble des morphismes qui vont de l'ensemble X à l'ensemble M voir la Proposition 3.4

De plus, pour chaque morphisme $(f : M \to N)$, on a une application

$$Hom_C(f,X) : Hom_C(N,X) \to Hom_C(M,X)$$

$$g \mapsto g \circ f.$$

Note 4.7. Il est à noter que le foncteur covariant $Hom_A(M,-)$ préserve les produits. D'autre part, le foncteur contravariant $Hom_A(-,N)$ transforme les sommes en produits.

Exemple 4.8. Un cas particulier du foncteur $Hom_{\mathcal{C}}(-,-)$ est celui où l'on prend comme catégorie $\mathcal{C} = ModA$ avec A une K-algèbre. Pour des A-modules X et Y, l'ensemble $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est un k-module, alors on a l'application suivante ;

$$Hom_{ModA}(X,-) : ModA \longrightarrow Modk$$

$$M \longmapsto Hom_{ModA}(X,M).$$

Il en va de même pour le foncteur $Hom_{ModA}(-,X)$ qui est le dual de celui présenté.

4.2 Les sous-bifoncteurs de $\mathrm{Ext}^1{}_{\mathcal{E}max}$

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive au sens de la Définition 3.10.

Définition 4.9. [BBGH20, Definition 3.1] On considère le bifoncteur additif suivant :

$$\mathrm{Ext}^1{}_{\mathcal{E}max} : \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{op} \longrightarrow Ab$$

$$(C,A) \mapsto \{\overline{(i,d)} | (i,d) \in \mathcal{E}_{max}\},$$

où $\overline{(i,d)}$ est la classe d'équivalence (voir 3.16) de la suite exacte courte (i,d). Ce bifoncteur est bien défini puisque $\mathcal{E}_{max}$ existe pour toute catégorie additive $\mathcal{A}$ (voir 3.28).

Et d'une manière plus générale :

Définition 4.10. [BBGH20, Definition 4.1] Soit $\mathcal{W}$ une structure partiellement exacte

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{W}} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to Ab$$

$$\mathbb{W}(C,A) = \left\{ \overline{(i,d)} \quad | \quad A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{d} C \quad \in \mathcal{W} \right\},$$

on note par $\overline{(i,d)}$ la classe d'équivalence de la suite exacte courte (i,d).

Proposition 4.11. *[BBGH20, Lemme 3.2] Soit $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ des structures exactes sur $\mathcal{A}$ avec $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. En assumant que la construction de la Définition 4.9 donne un foncteur additif qui est un groupe abélien. Alors il s'avère que le foncteur $\mathbb{V} = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{V}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \to Ab$ est en fait un **sous-bifoncteur** additif de $\mathbb{W} = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{W}}(-,-)$.*

Définition 4.12. [BH61, DRS+99] [BBGH20, Définition 3.5] Un sous-bifoncteur $F \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}})$ est dit *fermé* si, pour n'importe quelle suite exacte courte

$$E:\ A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{d} C$$

avec $\overline{(i,d)} \in F(C,A)$ et pour n'importe quel objet $X \in \mathcal{A}$, les suites qui suivent sont exactes dans la catégorie des groupes abéliens :

$$F(X,A) \to F(X,B) \to F(X,C)$$

et

$$F(C,X) \to F(B,X) \to F(A,X).$$

5 Rappels sur les treillis

Dans cette section, on fournit les prérequis combinatoitres en rappelant quelques notions et définitions nécessaires.

5.1 Rappels

On rappelle ici ce qu'est une structure de treillis sur un ensemble. Ce concept est indispensable pour construire des isomorphismes de treillis dans la suite de cette section.

Définition 5.1.

1. La *plus petite borne supérieure*, aussi appelée *suprémum*, d'une partie F d'un ensemble E est un élément $1 \in E$ tel que :
   (a) 1 est une borne supérieure de F ;
   (b) pour toute autre borne supérieure $m \in E$ de F, on a que $1 \leq m$.
2. La *plus grande borne inférieure*, aussi appelée *infimum*, d'une partie F d'un ensemble E est un élément $0 \in E$ tel que :
   (a) 0 est une borne inférieure de F ;
   (b) pour toute autre borne inférieure $m \in E$ de F, on a que $0 \geq m$.

Définition 5.2. Soit M un ensemble ordonné. Cet ensemble est un *treillis* si pour toute paire de deux éléments de M, il existe une borne supérieure (suprémum) et une borne inférieure (infimum)(voir note 5.1 ci-dessous). Autrement dit s'il existe deux opérations binaires $\vee$ et $\wedge$ vérifiant les axiomes suivants :

1. $\vee$ et $\wedge$ sont deux opérateurs désignant deux opérations binaires de la forme $M \times M \to M$.
2. La loi $\vee$ est associative et commutative [4]

[4] L'axiome d'associativité de la loi $\vee$ implique qu'il existe un élément identité I_a.

3. La loi $\wedge$ est associative et commutative.

4. Les opérations doivent respecter l'équation suivante [5]

$$m \vee (m \wedge n) = m = m \wedge (m \vee n), \forall m, n \in M.$$

Remarque 5.3. On nomme généralement l'équation précedente "loi d'absorption".

Exemple 5.4. L'ensemble des parties d'un ensemble muni de l'inclusion forme un treillis où la borne supérieure est l'union et la borne inférieure l'intersection.

Exemple 5.5. L'ensemble des entiers naturels muni de la relation de divisibilité forme un treillis, où la borne supérieure est le PPCM et la borne inférieure est le PGCD.

Définition 5.6. Un treillis est dit *borné* s'il possède un maximum et un minimum.

Exemple 5.7. L'ensemble des entiers naturels muni de la relation d'ordre $\leq$ n'est pas borné, mais le même ensemble muni de la relation d'ordre de divisibilité est un treillis borné dont le minimum est 1 et le maximum 0.

Définition 5.8. Un treillis est dit *complet* si toute partie possède une borne supérieure, ou encore si toute partie de E possède une borne inférieure.

Définition 5.9. Un treillis borné distributif (la loi $\vee$ est distributive par rapport à la loi $\wedge$,) et complémenté (chacun de ses éléments m possède un complément n vérifiant $m \wedge n = 0$ et $m \vee n = 1$) est dit *booléen.*

Définition 5.10. Un treillis est dit *modulaire* si *la loi de modularité* suivante est satisfaite :

$$s \leq b \implies s \vee (m \wedge n) = (s \vee m) \wedge b.$$

Proposition 5.11 ([Ass97], [AL09])**.** *Lorsqu'on considére un idéal bilatère I d'un anneau A, il existe une bijection croissante, dont l'inverse est aussi croissante et formant donc un isomorphisme de treillis :*

$$A \to A/I;$$

$$J \mapsto J/I$$

entre les idéaux J de A contenant I d'une part $I \subset J \subset A$, et les idéaux de A/I d'autre part $J/I \subset A/I$.

Théorème 5.12. *[Ass97, Lemme 1.4] $\mathcal{S}(M)$ est un treillis complet borné modulaire.*

[5] Comme conséquence de ces axiomes on aura que $m \vee m = m$ et $m \wedge m = m$, $\forall m \in M$.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{S}(M)$ défini en 2.7 ordonné par l'inclusion des ensembles forme un poset. Où les sous-modules $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ et $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ représentent respectivement l'infimum et le suprémum de chaque famille de sous-modules formant la structure de treillis complet sur $\mathcal{S}(M)$.
De plus, celui-ci est borné admettant 0 comme son plus petit élément et M comme son plus grand.
Enfin $\mathcal{S}(M)$ est modulaire vu qu'il satisfait la propriété modulaire suivante ; si $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{S}(M)$ et que $M_1 \subseteq M_2$, alors :

$$M_2 \cap (M_1 + M_3) = M_1 + (M_2 \cap M_3).$$

□

Définition 5.13. [DP02, 2.16] Soit L et K des treillis, alors une application $f : L \to K$ est un *morphisme de treillis* si $\forall a,b \in L$ on a :

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \qquad \text{et} \qquad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

Définition 5.14. [DP02, 2.16, 2.17] Soit L et K des treillis, une application $f : L \to K$ est un *isomorphisme de treillis* si f est un morphisme bijectif. De plus, si f est un isomorphisme de treillis bijectif alors son inverse est aussi un isomorphisme de treillis bijectif.

6 Les structures de treillis isomorphes

6.1 Le treillis des structures exactes

Théorème 6.1. *[BHLR20, Théorème 5.3, corollaire 5.4] L'ensemble partiellement ordonné $Ex(\mathcal{A})$ est un treillis borné et complet $(Ex(\mathcal{A}), \subseteq, \wedge, \vee)$.*

Démonstration. Nous ne ferons pas la preuve au complet, pour plus de détails allez voir la référence. L'ensemble partiellement ordonné $Ex(\mathcal{A})$ muni de l'inclusion des classes comme relation d'ordre forme un treillis pour les opérations suivantes :

- *la borne inférieure* $\wedge$ est définie par $\mathcal{E} \wedge \mathcal{E}' = \mathcal{E} \cap \mathcal{E}'$,
- *la borne supérieure* $\vee$ est définie par
  $\mathcal{E} \vee \mathcal{E}' = \cap\{\mathcal{E}'' \in Ex(\mathcal{A}) \mid \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'', \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}''\}$.

□

Théorème 6.2. *[BBGH20, Théorème 4.3] Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive, l'ensemble des sous-bifoncteurs fermés de $Ext^1_{\mathcal{E}_{max}}(-,-)$ que l'on notera $Cbf(\mathcal{A})$ forme un treillis $(Cbf(\mathcal{A}), \leq, \wedge, \vee)$.*

Démonstration. Tout comme pour le théorème précédent, nous ne ferons pas cette preuve dans l'article. Par contre, on y énoncera les éléments importants. On considère l'ensemble des sous-bifoncteurs de $Ext^1_{\mathcal{E}_{max}}$ partiellement ordonné par la relation d'ordre suivante :

$$F \leq F' \Longleftrightarrow F(C,A) \subseteq_{Ab} F'(C,A),$$

où $F,\ F' \in Cbf(\mathcal{A})$ des bifoncteurs et $F(C,A)$ est un sous-groupe abélien de $F'(C,A)$. Ce poset forme un treillis pour les opérations suivantes :

- *la borne inférieure* $\wedge$ est définie par

$$F \wedge F' = F \cap F'$$

  telle que $(F \wedge F')(C,A) = F(C,A) \cap_{Ab} F'(C,A)$ pour tous objets A, C de $\mathcal{A}$.

- *la borne supérieure* $\vee$ est définie par

$$F \vee F' = \cap\{F'' \in Cbf(\mathcal{A}) \,|\, F \leq F'', F' \leq F''\}.$$

$\square$

Théorème 6.3. *[BBGH20, Théorème 4.4] Les deux treillis* $(Ex(\mathcal{A}), \subseteq, \wedge, \vee)$ *et* $(Cbf(\mathcal{A}), \leq, \wedge, \vee)$ *sont isomorphes.*

Démonstration. Dans la preuve du [BBGH20, Théorème 4.4] on vérifie que l'application

$$\phi : Ex(\mathcal{A}) \longrightarrow Cbf(\mathcal{A})\,;\ \mathcal{E} \longmapsto Ext_{\mathcal{E}}(-,-)$$

forme un isomorphisme de treillis. $\square$

6.2 Le treillis des structures partiellement exactes

Théorème 6.4. *[BBGH20, Théorème 4.13] L'ensemble des structures partiellement exactes sur* $\mathcal{A}$ *forme un treillis*

$$(Wex(\mathcal{A}), \subseteq, \wedge, \vee_W).$$

Démonstration. L'ensemble partiellement ordonné $Wex(\mathcal{A})$ muni de l'inclusion des classes comme relation d'ordre forme un treillis pour les opérations suivantes :

- *la borne inférieure* $\wedge$ est définie par $\mathcal{W} \wedge \mathcal{W}' = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}'$,
- *la borne supérieure* $\vee_W$ est définie par
  $\mathcal{W} \vee_W \mathcal{W}' = \cap\{\mathcal{W}'' \in Wex(\mathcal{A}) \mid \mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}'', \mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}''\}$.

$\square$

Maintenant on introduit la structure de treillis suivante permettant de voir le treillis des structures partiellement exactes d'un point de vue fonctoriel.

Théorème 6.5. *[BBGH20, Théorème 4.8] Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive, l'ensemble des sous-bifoncteurs de $Ext^1_{\mathcal{E}_{max}}(-,-)$ que l'on notera $Bf(\mathcal{A})$ est un treillis $(Bf(\mathcal{A}), \leq, \wedge, \vee_{Bf})$.*

Démonstration. Tout comme pour les théorèmes précédents, nous ne ferons pas cette preuve dans l'article. Par contre, on y énoncera les éléments importants. On considère l'ensemble des sous-bifoncteurs de $Ext^1_{\mathcal{E}_{max}}(-,-)$ partiellement ordonné par la relation d'ordre suivante :

$$F \leq F' \iff F(C,A) \subseteq_{Ab} F'(C,A),$$

où $F,\ F' \in Cbf(\mathcal{A})$ des bifoncteurs et $F(C,A)$ est un sous-groupe abélien de $F'(C,A)$. Ce poset forme un treillis pour les opérations suivantes :

- *la borne inférieure* $\wedge$ est définie par

  $$F \wedge F' = F \cap F'$$

  telle que $(F \wedge F')(C,A) = F(C,A) \cap_{Ab} F'(C,A)$ pour tous objets A, C de $\mathcal{A}$.

- *la borne supérieure* $\vee Bf$ est définie par

  $$F \vee_{Bf} F'$$

  telle que $F \vee {}_{Bf} F' = \wedge\{F'' \in Bf(\mathcal{A}) \,|\, F \leq F'',\ F' \leq F''\}$. Autrement dit $(F \vee_{Bf} F')(C,A) = F(C,A) +_{Ab} F'(C,A)$ pour tous objets A, C de $\mathcal{A}$.

□

Le résultat suivant établit le lien entre les deux treillis 6.4 et 6.5 :

Théorème 6.6. *[BBGH20, Théorème 4.16] Il y a un isomorphismes de treillis entre les treillis $(Wex(\mathcal{A}), \subseteq, \wedge, \vee_{\mathcal{W}})$ et $(Bf(\mathcal{A}), \leq, \wedge, \vee_{Bf})$.*

Démonstration. □

6.3 Le troisième treillis

Cette section a pour but d'introduire un nouveau treillis isomorphe aux deux treillis $Wex(\mathcal{A})$ et $Bf(\mathcal{A})$.

On construit, étape par étape, un nouvel isomorphisme de treillis entre l'ensemble des sous-bifoncteurs de $Ext^1_{\mathcal{E}_{max}}$ basé sur une catégorie additive fixée $\mathcal{A}$ et un certain treillis de bimodules. Ce dernier est défini comme l'ensemble des sous-bimodules d'un module M, qu'on construit en fonction de $\mathcal{A}$. Cet isomorphisme nous permet d'avoir un isomorphisme direct entre le treillis des structures partiellement exactes sur $\mathcal{A}$ et le nouveau treillis des sous-bimodules de M.

Cela nous permet de voir les structures partiellement exactes de plusieurs façons, ce qui facilite l'étude de leurs propriétés.

6.3.1 Définition du treillis $Bim(B)$

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive Krull-Schmidt, avec $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ et $B = \mathrm{End}\,(X)$ est son algèbre d'Auslander définie en 3.12.

Définition 6.7. Pour tous les objets A et C, on considère les morphismes $\Delta_C : C \to C \oplus C$ et $\nabla_A : A \oplus A \to A$ et les deux suites exactes courtes $E : 0 \to A \overset{\mu}{\to} B \overset{\lambda}{\to} C \to 0$ et $E' : 0 \to A \overset{\mu'}{\to} B' \overset{\lambda'}{\to} C \to 0$. On définit la *somme de Baer* donnée par

$$E + E' = \nabla(E \oplus E')\Delta.$$

La somme de Baer correspond donc à prendre la somme amalgamée de la suite exacte courte $E \oplus E'$ selon ∇_A puis le produit fibré selon Δ_C.

Lemme 6.8. *L'ensemble M qui suit*

$$\bigoplus_{j,k=1}^{n} \{\overline{(i,d)} \mid X_j \overset{i}{\rightarrowtail} Y \overset{d}{\twoheadrightarrow} X_k \in \mathcal{E}_{max}, X_j, X_k \in Ind(\mathcal{A}), Y \in Obj(\mathcal{A})\}$$

$$\bigoplus_{j,k=1}^{n} \{X_j \overset{i}{\rightarrowtail} \quad \overset{d}{\twoheadrightarrow} X_k | \overline{(i,d)} \in \mathcal{E}_{max}, X_j, X_k \in Ind(\mathcal{A})\}$$

muni de la somme de Baer forme un bimodule sur l'algèbre d'Auslander B.

Démonstration. On considère les preuves dans [Mit65, Page 165], mais pour $Ext^1_{\mathcal{E}_{max}}$. Alors, les propriétés prouvées sont valides pour des suites exactes courtes dans les groupes abéliens $E, E' \in Ext^1_{\mathcal{E}_{max}}(X, X)$ avec $X = \bigoplus_{j=1}^{n} X_j$, $\forall j$ entre 0 et n avec $X_j \in Ind(\mathcal{A})$.
Donc [Mit65, Théorème 1.5, page 165,166] implique que M est un groupe abélien pour la somme de Baer. La preuve dans cette référence montre que la classe d'équivalence (pour la relation d'équivalence définie 3.16) de la suite exacte courte scindée

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow X \oplus X \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

représente l'élément neutre de ce groupe. [Mit65, Lemme 1.3, Lemme 1.4 (ii),(iii)] implique que M est un B-module à gauche et à droite selon la Définition 2.2, où la multiplication extérieure est donnée par le produit fibré et la somme amalgamée. De plus, [Mit65, Lemme 1.4 (iii)*] implique que ces deux structures de B-modules à gauche et à droite sont compatibles donc que M est un $(B\text{-}B)$ bimodule selon la Définition 2.13.

□

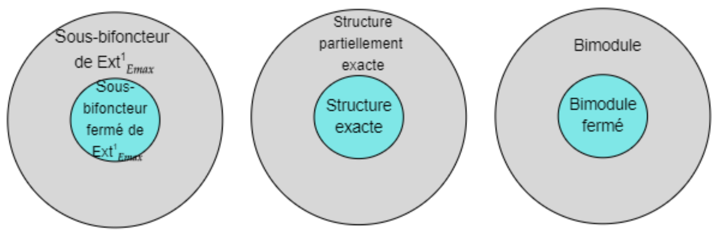
Théorème 6.9. *L'ensemble de tous les sous-bimodules de ${}_BM_B$ défini en 6.8, que l'on notera $Bim(B)$, forme un treillis borné complet modulaire*

$$(Bim(B), \leq, \wedge_{Bim(B)}, \vee_{Bim(B)}).$$

Démonstration. L'ensemble $Bim(B)$ muni de l'inclusion d'ensembles $\subseteq$ comme relation d'ordre forme un poset. De plus, ce poset forme un treillis comme 2.7 pour les opérations suivantes :

- *la borne inférieure* $\wedge_{Bim(B)}$ est définie par $N \wedge N' = N \cap N'$,
- *la borne supérieure* $\vee_{Bim(B)}$ est définie par $N \vee N' = N + N'$.

$\square$



Le diagramme ci-dessus explicite les relations entre les ensembles définis précédemment et leur sous-ensemble respectif.

6.3.2 Construction de l'isomorphisme

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive Krull-Schmidt et B l'algèbre d'Auslander définie en 3.12.

Pour cette construction, on considère l'ensemble $Bf(\mathcal{A})$ de tous les sous-bifoncteurs de $Ext^1_{\mathcal{E}_{max}}(-,-)$ défini en 4.9. On prend également l'ensemble $Bim(B)$ de tous les sous-bimodules du $(B\text{-}B)$ bimodule M construit en 6.8.
Remarquons que l'isomorphisme qu'on construit ici est donné par l'application de chaque bifoncteur à la somme directe de tous les objets indécomposables de la catégorie $\mathcal{A}$. Par ailleurs, puisque nos bifoncteurs sont biadditifs, les images des indécomposables de $\mathcal{A}$ résument toutes les informations nécessaires pour définir le bifoncteur en tout sur la catégorie $\mathcal{A}$. Notons que cette idée est similaire à celle utilisée pour montrer l'équivalence de catégories en [ASS06, A.2, exemple 2.10].

Théorème 6.10. *La correspondance suivante :*

$$\Phi : Bf(\mathcal{A}) \longrightarrow Bim(B)$$

$$F \mapsto F(X,X)$$

est un isomorphisme de treillis.

Démonstration.

1. Application bien définie :

   On considère un élément $F \in Bf(\mathcal{A})$, c'est-à-dire un sous-bifoncteur de $Ext^1_{\mathcal{E}_{max}}(-,-)$. Par l'isomorphisme 6.6, il existe une structure partiellement exacte $\mathcal{W}$ telle que $F = Ext^1_{\mathcal{W}}(-,-)$. Cet F appliqué à l'objet

$X = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} X_j$ donne l'ensemble des suites exactes courtes suivant

$$F(X,X) = Ext^1_{\mathcal{W}}(X,X) = Ext^1_{\mathcal{W}}(\overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} X_j, \overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} X_k) = \overset{n}{\underset{j,k=1}{\oplus}} Ext^1_{\mathcal{W}}(X_j, X_k)$$
$$= \overset{n}{\underset{j,k=1}{\oplus}} \{\overline{(i,d)} \mid X_j \overset{i}{\rightarrowtail} Y \overset{d}{\twoheadrightarrow} X_k \in \mathcal{W}\}.$$

Pour prouver que $F(X,X) \in Bim(B)$, montrons que $F(X,X)$ est un sous-bimodule du $(B$-$B)$ bimodule M défini en 6.8. C'est-à-dire montrons que c'est un sous-ensemble de M ayant une structure de bimodule par les mêmes opérations de la structure de $(B$-$B)$ bimodule sur M restreintes à l'ensemble $F(X,X)$:

- sous-ensemble de M :
  le fait que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{E}_{max}$ implique que
  $$F(X,X) = \overset{n}{\underset{j,k=1}{\oplus}} \{\overline{(i,d)} \mid X_j \overset{i}{\rightarrowtail} Y \overset{d}{\twoheadrightarrow} X_k \in \mathcal{W}\} \subseteq$$
  $$\overset{n}{\underset{j,k=1}{\oplus}} \{\overline{(i,d)} \mid X_j \overset{i}{\rightarrowtail} Y \overset{d}{\twoheadrightarrow} X_k \in \mathcal{E}_{max}\} = M$$
- $(B$-$B)$ bimodule :
  L'argument des preuves dans [Mit65, Lemme 1.3, Lemme 1.4, Théorème 1.5] est valide pour $Ext^1_{\mathcal{W}}(-,-)$ vu qu'il n'utilise pas les axiomes $(E1)$ et $(E1)^{op}$ d'une structure exacte (voir 3.22). Par le fait même, l'argument s'applique à la structure partiellement exacte $\mathcal{W}$. Cela implique que $F(X,X) = Ext^1_{\mathcal{W}}(\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} X_k, \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} X_j)$ forme un $(B$-$B)$ bimodule pour les mêmes opérations que M vu en 6.8.

En plus $F = Ext^1_{\mathcal{W}}(-,-)$ est un foncteur bien défini alors Φ envoie chaque $F \in Bf(\mathcal{A})$ à une *unique* image $F(X,X) \in Bim(B)$ et donc Φ est une application bien définie.

2. bijection :

   - injectif :
     On considère deux sous-bifoncteurs F, $G \in Bf(\mathcal{A})$ tel que leurs images sous Φ sont des $(B$-$B)$ bimodules égaux :
     $$\begin{aligned} \bigoplus_{r,s=1}^{n} F(X_r,X_s)^{X(r)X(s)} &\cong F(X,X) \\ &= G(X,X) \\ &\cong \bigoplus_{r,s=1}^{n} G(X_r,X_s)^{X(r)X(s)}, \end{aligned}$$

où $X \cong X_1^{X(1)} \oplus \cdots \oplus X_n^{X(n)}$.

On considère deux objets Y, Z de $\mathcal{A}$, qu'est une catégorie Krull-Schmidt, alors ils se décomposent en somme directe finie d'objets indécomposables de $\mathcal{A}$, et vu que $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ est la somme directe de tous les objets indécomposables de $\mathcal{A}$ alors tous objets Y, Z s'écrivent comme somme directe de facteurs directs de X, ou autrement sont des sous objets de X :

$$Y \cong X_1^{y(1)} \oplus \cdots \oplus X_n^{y(n)}$$

$$Z \cong X_1^{z(1)} \oplus \cdots \oplus X_n^{z(n)}.$$

Sachant que F et G sont des bifoncteurs biadditifs, les images de (Y, Z) se décomposent :

$$F(Y,Z) \cong \bigoplus_{j,k=1}^{n} F(X_k,X_j)^{y(k)z(j)}$$

$$G(Y,Z) \cong \bigoplus_{j,k=1}^{n} G(X_k,X_j)^{y(k)z(j)}.$$

L'hypothèse $F(X,X) = G(X,X)$ et l'additivité des foncteurs F et G implique l'égalité sur tous les facteurs directs :

$$F(X_k,X_j) = G(X_k,X_j)$$

$\forall j,k$ on obtient $F(Y,Z) = G(Y,Z)$ $\forall Y$, Z dans $\mathcal{A}$ et alors $F = G$, d'où Φ est injectif.

- surjectif :

  Soit $N \in Bim(B)$ un sous-bimodule de M dont la structure de (B-B) bimodule est étudiée en 6.8; étant un groupe abélien pour la somme de Baer dont l'élément neutre est donné par la classe d'équivalence de la suite exacte courte scindée basée sur X et les deux opérations de multiplication externes par des morphismes $b \in B$ sont données par la somme amalgamée et le produit fibré. Alors par la définition d'un sous-module 2.6 les suites exactes courtes scindées appartiennent à N et toutes les suites exactes courtes de N satisfont les axiomes $(E0)$, $(E0)^{op}$,$(E2)$ et $(E2)^{op}$ et leurs sommes directes forment par 3.25 une structure partiellement exacte $\mathcal{W}$. De plus, par 6.6 il existe un bifoncteur additif $F = Ext^1_{\mathcal{W}}(-,-) \in Bf(\mathcal{A})$ tel que $N \cong \bigoplus_{j,k=1}^{n} Ext^1_{\mathcal{W}}(X_k, X_j) = F(X,X)$.

3. morphisme d'ensembles partiellement ordonnés :

   Ici, on montre que Φ préserve l'ordre, c'est-à-dire que pour F, $F' \in Bf(\mathcal{A})$ tel que F est un sous-bifoncteur de F' alors $F(X,X)$ est un sous-bimodule de $F'(X, X)$ dans M.

Par la définition de l'ordre sur le poset $Bf(\mathcal{A})$, on a que $F(C,A)$ est un sous-groupe abélien de $F'(C,A)$ pour tous objets A, C de $\mathcal{A}$. C'est vrai en particulier pour $A = C = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} X_j = X$. On obtient donc que $F(X,X)$ est un sous-groupe abélien de $F'(X,X)$.
Il reste à montrer que $F(X,X)$ est stable pour la multiplication externe par des éléments de l'algèbre d'Auslander B. Soit $b \in B$ et $E \in F(X,X)$, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E : 0 \arrow[r] & X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "b"] & \cdot \arrow[r, two heads, "d"] \arrow[d, dashed] & X \arrow[r] \arrow[d, equal, "1_X"] & 0 \\
bE : 0 \arrow[r] & X \arrow[r, tail, dashed, "p"] & S.A \arrow[r, two heads, dashed, "q"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où la somme amalgamée existe grâce à l'axiome $(E2)$ de la Définition 3.25. On a donc $(p,q) \in F(X,X)$ ce qui implique que $F(X,X)$ est un module à gauche. Duallement, grâce à $(E2)^{op}$, $F(X,X)$ est également un module à droite. D'où $F(X,X)$ est un sous-bimodule de $F'(X,X)$. On obtient ainsi que l'implication suivante est vraie.

$$F \leq F' \Longrightarrow \Phi(F) \subseteq \Phi(F').$$

4. morphisme de treillis :

   On veut montrer que Φ préserve la structure de treillis, c'est-à-dire que Φ préserve *la borne inférieure* $\wedge$ ainsi que *la borne supérieure* $\vee$:

   - Pour ce faire, on montre qu'en appliquant Φ à la borne inférieure de n'importe quels deux éléments du treillis $Bf(\mathcal{A})$, on obtient la borne inférieure de leurs images dans le treillis $Bim(B)$. Par les Théorèmes 6.2 et 6.5), la borne inférieure de $Bf(\mathcal{A})$ est donnée par $(F \wedge_{Bf} F')(C,A) = F(C,A) \cap_{Ab} F'(C,A)$ pour tous objets A, C de $\mathcal{A}$. C'est vrai en particulier pour $A = C = \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}} X_j = X$. Donc, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi(F \wedge_{Bf} F') &= (F \wedge_{Bf} F')(X,X) \\
&= F(X,X) \cap_{Ab} F'(X,X) \\
&= F(X,X) \cap_{Mod(B)} F'(X,X) \\
&= F(X,X) \wedge_{Bim(B)} F'(X,X) \\
&= \Phi(F) \wedge_{Bim(B)} \Phi(F').
\end{aligned}$$

     Or, l'intersection des bimodules représente la borne inférieure du treillis de $Bim(\mathcal{A})$ par 6.9.

- Pour ce faire, on montre qu'en appliquant Φ à la borne supérieure de n'importe quels deux éléments du treillis $Bf(\mathcal{A})$, on obtient la borne supérieure de leurs images dans le treillis $Bim(B)$. Par le Théorème 6.2, pour tous objets A, C de $\mathcal{A}$, la borne supérieure de $Bf(\mathcal{A})$ est donnée par $(F \vee_{Bf} F')(C,A) = F(C,A) +_{Ab} F'(C,A)$. C'est vrai en particulier pour $A = C = \bigoplus_{j=1}^{n} X_j = X$. Donc, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(F \vee_{Bf} F') &= (F \vee_{Bf} F')(X,X) \\ &= F(X,X) +_{Ab} F'(X,X) \\ &= F(X,X) +_{Mod(B)} F'(X,X) \\ &= F(X,X) \vee_{Bim(B)} F'(X,X) \\ &= \Phi(F) \vee_{Bim(B)} \Phi(F').\end{aligned}$$

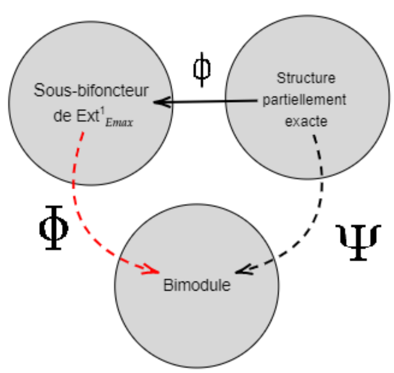
  Or, la somme des bimodules représente la borne supérieure du treillis de $Bim(\mathcal{A})$ par 6.9.

D'où l'application Φ est bien un isomorphisme de treillis par 5.14.

□

Corollaire 6.11. *Les deux treillis $Wex(\mathcal{A})$ et $Bim(B)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Par le Théorème 6.6, il existe un isomorphisme de treillis ϕ entre le treillis $Wex(\mathcal{A})$ étudié en 6.4 et le treillis $Bf(\mathcal{A})$ étudié en 6.5. De plus, on vient de montrer, dans le Théorème 6.10, qu'il existe également un isomorphisme de treillis Φ entre le treillis $Bf(\mathcal{A})$ étudié en 6.5 et le treillis $Bim(B)$ étudié en 6.9. On considère alors l'isomorphisme $\Psi = \Phi \circ \phi$ donné par la composition. On obtient un isomorphisme de treillis entre $Wex(\mathcal{A})$ et $Bim(B)$. □



La flèche rouge Φ de ce diagramme représente l'application qu'on a construite dans cet article. La flèche pleine noire ϕ représente l'application qui existait déjà. La flèche pointillée noire représente la composition de ces deux applications.

Remarque 6.12. L'isomorphisme de treillis Φ étudié en 6.10 est un morphisme de treillis bijectif. On a montré la bijectivité en montrant que c'est injectif et surjectif. Un moyen alternatif est de considérer l'application inverse suivante

$$\Phi^{-1} : Bim(B) \longrightarrow Bf(\mathcal{A})$$

$${}_BN_B \longmapsto F_N(-,-)$$

avec

$$F_N(-,-) : \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{op} \to Ab$$

$$\{\overline{(i,d)} | A \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{d}{\twoheadrightarrow} C \in \mathcal{E}_{max}, \overline{(i,d)} \in N\}$$

où

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{d} C \longrightarrow 0$$

tel que $\Phi \circ \Phi^{-1} = 1_{Bim(B)}$ et $\Phi^{-1} \circ \Phi = 1_{Bf(\mathcal{A})}$.

6.4 Exemple

Dans cette section, on présente un exemple concret du treillis étudié dans les sections précédentes de cet article. Par contre, pour plus de détails sur les concepts utilisés, on suggère au lecteur d'aller voir la référence [ASS06]. Cela est indispensable pour une profonde compréhension de cette section.

Soit la catégorie additive $\mathcal{A} = \operatorname{rep} Q$ des représentations du carquois suivant :

$$Q : \qquad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3.$$

Le carquois d'Auslander-Reiten de $\mathcal{A}$ est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & P_1 \arrow[dr] & & \\
 & P_2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & I_2 \arrow[dr] & \\
P_3 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & S_2 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & S_1
\end{tikzcd}$$

Il existe, à équivalence près, exactement cinq suites exactes courtes indécomposables non-scindées. Les trois premières énoncées ci-dessous sont celles d' Auslander-Reiten :

$$(\alpha) \qquad 0 \longrightarrow P_3 \xrightarrow{a} P_2 \xrightarrow{c} S_2 \longrightarrow 0$$

$$(\beta) \qquad 0 \longrightarrow S_2 \xrightarrow{e} I_2 \xrightarrow{f} S_1 \longrightarrow 0$$

$$(\gamma) \qquad 0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \oplus S_2 \longrightarrow I_2 \longrightarrow 0$$

$$(\delta) \qquad 0 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d} I_2 \longrightarrow 0$$

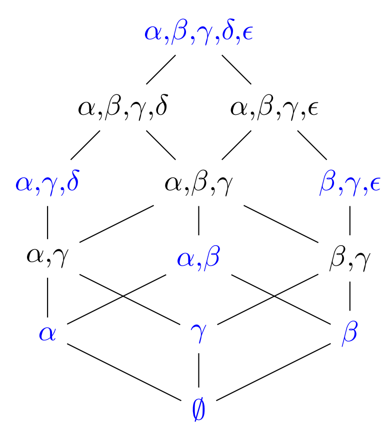
$$(\epsilon) \qquad 0 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{b} P_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$$

À isomorphisme près, un foncteur additif est uniquement déterminé par ses valeurs sur des objets indécomposables. Pour étudier les sous-bifoncteurs additifs de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}$, il suffit d'examiner la structure des bimodules sur l'espace vectoriel généré par ces cinq suites exactes courtes indécomposables non-scindées. Selon la notation de [M65,p.163] et aussi de [BBH, déf 3.1] la notation habituelle est de mettre le morphisme à gauche pour la somme amalgamée et à droite pour le produit fibré : $\delta e = \alpha$, $a\delta = \gamma$, $\epsilon f = \gamma$, $c\epsilon = \beta$:

$$\begin{tikzcd} & \epsilon \arrow[dl, "c"'] \arrow[dr, "f"] & & \delta \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "e"] & \\ \beta & & \gamma & & \alpha \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \delta \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "a"] & & \epsilon \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "c"] & \\ \alpha & & \gamma & & \beta \end{tikzcd}$$

On voit que $Ext^1_{\mathcal{E}_{max}}(-,-)$ admet treize sous-bifoncteurs (incluant l'élément neutre et lui-même). Le treillis $Bim(B)$, défini en 6.9, est représenté par le diagramme suivant où chaque sous-bimodule est représenté par son sous-ensemble de générateurs :



Les huit sous-bimodules en bleu parmi tous les sous-bimodules de $Bim(B)$ représentent les huit structures exactes de $Ex(\mathcal{A})$ parmi toutes les structures partiellement exactes de $Wex(\mathcal{A})$. D'une manière équivalente, ceux-ci représentent les huit sous-bifoncteurs fermés de $Cbf(\mathcal{A})$ parmi tous les sous-bifoncteurs de $Bf(\mathcal{A})$.

Références

[AL09] Ibrahim ASSEM et Pierre Yves LEDUC : *Cours d'algèbre : groupes, anneaux, modules et corps.* Presses inter Polytechnique, 2009.

[Ass97] Ibrahim ASSEM : *Algèbres et modules.* Masson, Paris, 1997.

[ASS06] Ibrahim ASSEM, Daniel SIMSON et Andrzej SKOWROŃSKI : *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, volume 65 de *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Techniques of representation theory.

[BBGH20] Rose-Line BAILLARGEON, Thomas BRÜSTLE, Mikhail GORSKY et Souheila HASSOUN : On the lattices of exact and weakly exact structures. *arXiv preprint arXiv :2009.10024*, 2020.

[BH61] Michael Charles Richard BUTLER et Geoffrey HORROCKS : Classes of extensions and resolutions. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 254(1039):155–222, 1961.

[BHLR20] Thomas BRÜSTLE, Souheila HASSOUN, Denis LANGFORD et Sunny ROY : Reduction of exact structures. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 224(4):106212, 2020.

[Büh10] Theo BÜHLER : Exact categories. *Expositiones Mathematicae*, 28(1): 1–69, 2010.

[DP02] Brian A DAVEY et Hilary A PRIESTLEY : *Introduction to lattices and order.* Cambridge university press, 2002.

[DRS+99] Peter DRÄXLER, Idun REITEN, Sverre SMALØ, Øyvind SOLBERG, B KELLER *et al.* : Exact categories and vector space categories. *Transactions of the American Mathematical Society*, 351(2):647–682, 1999.

[Mit65] Barry MITCHELL : *Theory of categories.* Academic Press, 1965.

[Qui73] Daniel QUILLEN : Higher algebraic k-theory : I. *In Higher K-theories*, pages 85–147. Springer, 1973.

[Rum11] Wolfgang RUMP : On the maximal exact structure of an additive category. *Fundamenta Mathematicae*, 214:77–87, 2011.

SOUHEILA HASSOUN
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: `Souheila.Hassoun@USherbrooke.ca`

ÉLODIE LAPOINTE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: `Elodie.Lapointe@USherbrooke.ca`